Composition de Mathématiques – B, Filières MP et MPI (X)

1 Présentation du sujet

Le sujet de Math B 2023 démontre un théorème de réduction en famille pour des matrices symétriques réelles dépendant d'un paramètre réel. Fixons un entier naturel $n \geq 2$. Nous considérons une application $t \longmapsto M(t)$ d'un intervalle ouvert $]-\rho,\rho[$ dans $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles de taille n et nous supposons que toutes les entrées de la matrice sont développables en séries entières (DSE dans la suite) sur l'intervalle. Le but du problème est de démontrer l'existence d'une famille DSE $t \longmapsto P(t)$ de matrices orthogonales telles que toutes les matrices ${}^tP(t)M(t)P(t)$ soient diagonales. Cela se fait au prix d'une réduction de l'intervalle de définition à un sous intervalle ouvert centré $]-r,r[$ avec $\rho \geq r > 0$.

L'ensemble du sujet vise à démontrer ce joli théorème en commençant par étudier l'anneau des fonctions DSE puis les polynômes à coefficients dans cet anneau. Ces résultats s'appliqueront à des polynômes caractéristiques puisque le sujet nous amènera à faire de la réduction.

La première partie étudie essentiellement l'anneau $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ des fonctions développables en séries entières sur l'intervalle $]-\rho,\rho[$. Ainsi, la question *4* le munit d'une norme d'algèbre, notée $\|\cdot\|_r$. La question suivante montre, de manière adaptée à la suite du problème, la complétude de $(\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}), \|\cdot\|_r)$. La question *6* montre l'inversibilité locale d'une fonction DSE ne s'annulant pas en l'origine. La partie se conclut par la preuve de l'intégrité de l'anneau $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$.

La seconde partie étudie les racines d'une famille développable en série entière de polynômes. Plus précisément, soit P un polynôme unitaire de degré n dont les coefficients sont des fonctions DSE sur l'intervalle $]-\rho;\rho[$; en somme, P est un élément unitaire de l'anneau $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})[X]$ des polynômes à coefficients dans l'anneau $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$. Nous supposons que, en $t=0$, le polynôme P a une racine λ de multiplicité d. Le théorème 1 de l'énoncé montre que sur un voisinage $]-r;r[$ de 0, le polynôme P se factorise en FG avec $F=(X-\lambda)^d$ en $t=0$. Ainsi, les racines de F sont une famille DSE de racines qui se spécialisent en λ avec multiplicité d en $t=0$. Ce théorème est ainsi un résultat de dépendance DSE des racines de P au voisinage de $t=0$. Le cas $d=1$ est plus facile à appréhender de ce point de vue. En effet, dans ce cas, $F=X-\lambda(t)$ où $\lambda(t)$ est une racine de $P(t)$, la fonction $t \longmapsto \lambda(t)$ étant DSE et valant λ en $t=0$.

Nous commençons par munir l'anneau $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})[X]$ d'une norme $\|\cdot\|_{r,s}$ d'algèbre. Nous montrons ensuite qu'il existe une division euclidienne dans $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})[X]$ par les polynômes unitaires et nous étudions la continuité de cette opération. Nous montrons ensuite le théorème dans le cas $\lambda=0$. La preuve construit une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})[X]$ et montre qu'elle converge vers un polynôme F satisfaisant le théorème 1. La première approximation de F est F_0, le polynôme F tronqué au degré d. Si F_0 divise P, nous avons terminé. Sinon, nous considérons $F_1 = F_0 + R_0$, où R_0 est le reste de la division euclidienne de F_0 par P. Si F_1 divise P, nous avons terminé. Sinon, nous considérons $F_2 = F_1 + R_1$ de manière analogue. Nous construisons ainsi la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})[X]$. Nous montrons alors que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})[X]$ pour la norme $\|\cdot\|_{r,s}$ vers un polynôme

F qui divise P et satisfait le théorème. Le résultat de complétude montré dans la première partie joue un rôle essentiel ici.

Cette partie se conclut par une application du théorème 1 décrit ci-dessus : nous montrons que la racine carré d'une fonction DSE strictement positive est DSE sur un voisinage de 0.

La troisième et dernière partie utilise les deux premières pour démontrer le théorème de réduction en famille. La preuve procède par récurrence sur la taille n des matrices. Ainsi l'étape clé consiste à diagonaliser M par blocs par des familles de matrices orthogonales. Nous commençons par le faire au moyen d'une famille DSE de matrices inversibles. Un des points clés ici est le théorème 1 mentionné ci-dessus. Un autre est le fait que l'inverse d'une famille DSE de matrices inversibles est une famille DSE de matrices (sans surprise, cela se déduit des formules de Cramer). La dernière étape est un théorème de Gram-Schmidt en famille, utilisé pour rendre orthogonale la matrice de passage. Ici, un point clé est le dernier résultat de la partie précédente permettant de prendre des racines carrées en famille DSE.

2 Conseils généraux pour les candidates et les candidats

Les correcteurs soulignent qu'il est préférable de s'attacher à traiter correctement plusieurs questions consécutives et parmi elles des questions plus difficiles, plutôt que d'essayer de survoler toutes les parties et de tenter de « grappiller » des points sur les questions les plus faciles. Le barème est établi de sorte qu'une telle stratégie est forcément vouée à l'échec. À l'opposé, passer du temps pour, par exemple, réussir à traiter correctement les questions comme la 5 et la 6c donnait la clé pour réussir les questions suivantes de la Partie I et s'assurer un nombre de points suffisant pour atteindre la barre d'admissibilité. Il est par contre tout à fait autorisé de « sauter » une question que l'on ne serait pas parvenu pas à résoudre, puis d'en utiliser le résultat plus tard. Il faut alors veiller à ne pas oublier de vérifier soigneusement toutes les hypothèses requises pour appliquer ces « boîtes noires ».

Le soin apporté aux copies pose trop souvent problème. Nous rappelons aux candidates et candidats que l'usage d'un brouillon est indispensable afin de ne présenter sur sa copie que les étapes essentielles d'un raisonnement ou d'un calcul et de ne pas y faire figurer des arguments faux ou trop incomplets. Rajoutons que même les vérifications triviales (comme la positivité d'une norme) doivent être évoquées, même rapidement, par soucis d'exhaustivité.

Enfin, la lisibilité des copies peut parfois poser un réel problème aux correcteurs. Nous rencontrons trop de copies remplies de ratures et/ou parfaitement illisibles du fait d'une graphie microscopique ou indéchiffrable. Dans les cas où malgré tous nos efforts de déchiffrage, certaines parties du texte restent incompréhensibles pour le correcteur, et dans le doute, les points ne sont pas attribués. Dans l'autre sens, il est bienvenu d'encadrer ou de souligner les éléments clefs des démonstrations.

3 Indications sur le barème et statistiques générales

Les résultats de l'épreuve sont en accord avec les directives statistiques générales du concours, ce qui garantit l'influence respective convenable des différentes épreuves.

Voici les tableaux de statistiques pour les épreuves écrits Maths B de MP et MPI, respectivement.

Nombre de copies :	1859
Note moyenne :	9.25
Écart-type :	3.85
Coefficient de variation :	41 %

Statistiques d'épreuve, effectifs MP.

Nombre de copies :	251
Note moyenne :	9.21
Écart-type :	4.04
Coefficient de variation :	43 %

Statistiques d'épreuve, effectifs MPI.

Au regard du niveau des copies des années passées, nous avons pu constater une légère baisse du niveau des candidats faibles. Nous avons eu entre les mains un nombre élevé de copies faibles qui ne peut s'expliquer uniquement par un plus grand nombre d'inscrits dont le niveau serait insuffisant pour prétendre à concourir. Le sujet en lui-même n'était pas non plus particulièrement difficile par rapport à d'autres années. Enfin, nous avons constaté aussi le maintien du bon niveau pour les candidats qui se sont retrouvés admissibles au concours.

4 Examen détaillé des questions

Ce qui suit n'est pas un corrigé de l'épreuve, mais une liste de commentaires et de remarques des correcteurs question par question. Notons que, pour avoir une note correcte à l'épreuve il est demandé aux candidats, pour ne pas dire requis des candidats, de bien réussir les questions « difficiles » représentant le corps principale du sujet (*i.e.*, les questions *6a -7*, *11-16*, *20-26*). La rédaction exclusive de réponses à des questions « faciles » (*i.e.*, les questions *1-4*, *8a-9b*, *10*, etc.) ne sera jamais suffisante pour permettre l'obtention d'une note satisfaisante.

Les notes données dans le texte en premier lieu, relèvent de l'option MP ; les notes de l'option MPI sont données en deuxième lieu entre parenthèses.

4.1 Première Partie

Question 1 Pour la stabilité de $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ par somme, il suffit de constater que la somme de deux séries convergentes (resp. entières) est convergente (resp. entière). Un raisonnement coefficient par coefficient permet alors de traiter facilement la question sur les polynômes et les matrices. La plupart des candidats démontrent des choses inutiles comme des résultats d'absolue convergence qui révèlent ainsi une fragilité qui ne fut pas pénalisée par le barème à ce stade.

Taux de réussite : 100% (MPI - idem).

Question 2 Pour la stabilité de $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ par produit, nous devons aussi utiliser le produit de Cauchy pour les séries numériques **absolument** convergentes. L'absence de mention de nécessité de la convergence absolue a été pénalisée par le barème.

Le résultat sur la stabilité par produit de l'ensemble des fonctions à valeurs matricielles $\mathcal{D}_\rho(\mathcal{M}_n\mathbb{R})$ découle directement des résultats de stabilité montrés pour $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$.

Taux de réussite : 64 % (MPI - 68%).

Question 3 Les correcteurs ont mis en valeur les rédactions qui faisaient apparaître clairement un raisonnement en deux temps. En premier temps, nous obtenons l'annulation des coefficients de la série entière sur $]-r,r[$ par l'unicité du développement en DSE. Puis, en deuxième temps, nous concluons en injectant cette information dans la formule valable sur $]-\rho,\rho[$.

Taux de réussite : 77% (MPI - 76%).

Question 4 Question immédiate sur le contenu du cours. La mention des quatre propriétés de la définition de la norme (positivité, séparabilité (caractère semi-défini), homogénéité et l'inégalité triangulaire) a été requise. La sous-multiplicativité de la norme découlait du produit de Cauchy.

Taux de réussite : 55% (MPI - 59%).

Question 5 La convergence uniforme pose des difficultés de rédaction à de nombreux candidats. Pour $x \in]-r,r[$, il suffit de majorer la valeur absolue $|f_n(x)|$ du terme général par le terme général d'une série *numérique* convergente (et donc indépendante de la variable x). Ces trois ingrédients (majoration, convergence et indépendance) doivent apparaître. Le fait que la limite

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n \tag{1}$$

appartienne à $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ se montre ensuite à l'aide du théorème de Fubini (sommation par paquets) pour les familles sommables. Ensuite, la convergence de la série (1) pour la norme $\|\cdot\|_r$ se montre par une majoration similaire à celle de la première partie de cette question.

Taux de réussite : 18% (MPI - 16%).

Question 6a La formulation de la question a posé des difficultés à quelques candidats. Il fallait y montrer que l'inverse d'une fonction DSE ne s'annulant pas en 0 était DSE sur un intervalle $]-r,r[$, avec $r>0$ suffisamment petit, en admettant le résultat pour les fonctions f DSE telles que $f(0)=1$.

Taux de réussite : 89% (MPI - 86%).

Question 6b Cette question se fait à l'aide du produit de Cauchy et de l'unicité des coefficients d'un DSE.

Taux de réussite : 91% (MPI - 95%).

Question 6c Soit $f \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$. Nous pouvons utiliser le fait que pour un t choisi à l'intérieur de l'intervalle $]-\rho,\rho[$, la somme

$$f(t) = \sum a_n t^n$$

converge, son terme général tend vers zéro et la suite $(|a_n t^n|)_{n\geqslant 0}$ est donc bornée. Ensuite, nous arrivons à la conclusion en choisissant un majorant supérieur à 1 de cette suite.

Plusieurs erreurs ont été faites : certains affirment que $\sum a_n \rho^n$ converge, d'autres candidats ne voient pas la nécessité de $M \geq 1$ dans l'inégalité $M \leq M^n$, d'autres élèves prennent une « constante c » de la forme $\sqrt[n]{M}$, d'autres enfin utilisent la réciproque du critère de d'Alembert (qui n'est pas vraie, le critère de d'Alembert n'étant pas une équivalence), *etc.*

Une proportion non négligeable de candidats ont essayé une preuve par l'absurde. Ceci était possible mais significativement plus compliqué et une partie considérable de ceux qui l'ont tentée ont échoué.

Taux de réussite : 40% (MPI - 36%).

Question 6d La question consiste à faire une simple récurrence forte. Une rédaction claire de la récurrence (et de ses étapes) a été exigée.

Taux de réussite : 86% (MPI - 82%).

Question 6e Il s'agissait ici de rédiger « un exemple type » d'un raisonnement par analyse-synthèse. Certains candidats n'ont pas fait apparaître clairement le fait qu'ils définissaient eux-mêmes la série $g(t) = \sum_n b_n t^n$.

Ensuite, il fallait montrer que cette fonction DSE convenait (*i.e.*, elle appartenait à $\mathcal{D}_{1/2c}(\mathbb{R})$ et satisfaisait l'équation $f(t)g(t)=1$ sur l'intervalle en question).

Taux de réussite : 57% (MPI - 51%).

Question 7 Cette question délicate dans sa rédaction admet plusieurs solutions. En premier lieu, il convenait de vérifier les axiomes de sous-anneau pour $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ vu comme partie de l'anneau de toutes les fonctions. Un bon nombre d'élèves ont simplement omis cette étape.

La deuxième partie de la question consiste à montrer que l'anneau $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ est intègre. Pour la mise en place de cette partie de la question, supposons d'abord que f et g sont des éléments de $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ tels que $fg = 0$; puis que, par exemple $f \neq 0$, pour montrer que $g = 0$.

Certains ont alors utilisé le produit de Cauchy puis une récurrence sur les coefficients du DSE de ce produit. Une variante consiste à raisonner par l'absurde en se focalisant sur les premiers coefficients non nuls des séries f et g.

Le moyen plus élégant consistait à factoriser dans f une puissance de t convenable et ensuite d'utiliser la question *6e* pour montrer que $t^k g(t) = 0$ pour tout $t \in]-r; r[$. Deux variantes ont été utilisées pour conclure : un argument de continuité montre que $g(t) = 0$ pour tout $t \in]-r; r[$ puis la question *3* permet d'achever la démonstration. Sinon, nous refaisons le raisonnement de la question *3* : la condition $t^k g(t) = 0$ sur $]-r; r[$ implique l'annulation des coefficients de $t^k g(t)$, qui par bonheur se déduisent directement de ceux de g.

Nous avons pu voir de nombreuses erreurs à cette question. La plus spectaculaire étant la confusion entre les propositions « f est non nulle » et « f qui ne s'annule pas » sous la forme : « comme $f \neq 0$, $f(0) \neq 0$ » (!!!).

La qualité des réponses apportées par les candidats était assez variable. Ainsi des candidats ont obtenu une partie des points.

Taux de réussite : 8% (MPI - 10%).

4.2 Deuxième Partie

Question 8a Question facile. La rédaction des quatre propriétés de la norme a été exigée (*i.e.*, positivité, caractère semi-défini, homogénéité, inégalité triangulaire).

Taux de réussite : 86% (MPI - 92%).

Question 8b Dans cette question, l'argument essentiel est la sous-multiplicativité de la norme $\|\cdot\|_r$ démontrée à la question *4*.

Taux de réussite : 93% (MPI - 87%).

Question 9a Une bonne réponse à cette question requiert la rédaction de deux étapes : l'existence et l'unicité.

En ce qui concerne la preuve de l'existence, il s'agit de montrer que l'algorithme de la division euclidienne est aussi valide dans l'anneau $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ puisque le polynôme B est unitaire. Comme souvent, pour montrer qu'un algorithme de ce type est valide, la preuve se rédige sous la forme d'une récurrence sur le degré de A.

En ce qui concerne l'unicité, nous avons pu voir deux solutions. La première solution consiste à mimer la preuve connue pour $\mathbb{R}[X]$. Le piège est d'utiliser la formule pour le degré d'un produit sans précaution. Celle-ci utilise en effet l'intégrité de l'anneau ou le fait qu'un des facteurs du produit est unitaire. La seconde preuve consiste à écrire la formule demandée en $t \in]-\rho, \rho[$, puis à utiliser l'unicité dans l'anneau $\mathbb{R}[X]$. Là aussi, le fait que B soit unitaire est utile pour comparer le degré de l'évaluation de B en t à celui de $B \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})[X]$.

Taux de réussite : 13% (MPI - 9%).

Question 9b D'abord posons $B = X^d$, et écrivons

$$A = BQ + R = X^d Q + R.$$

La clé ici est d'observer que les coefficients de A sont ceux de Q et R (à une translation d'indice correspondante près). En ce qui concerne le cas général, nous utilisons le cas $B = X^d$ avec des polynômes auxiliaires en écrivant $B = X^d + \tilde{B}$, puis en reconnaissant dans la formule

$$A - \tilde{B}Q = A - (B - X^d)Q = X^d Q + R$$

la division euclidienne $(A - \tilde{B}Q)$ par X^d. Cette deuxième étape, assez délicate, était rarement bien rédigée.

Taux de réussite : 5% (MPI - 4%).

Question 10 Question sans difficulté majeure.

Taux de réussite : 76% (MPI - 56%).

Question 11 Question difficile qui demande une bonne compréhension des propriétés des normes $\|.\|_r$ et $\|.\|_{r,s}$. Par exemple, si $f \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ et $f(0) = 0$, nous constatons que

$$\lim_{r \to 0^+} \|f\|_r = 0.$$

D'une manière similaire, (pour s fixé !) la quantité $\|F_0 - X^d\|_{r,s}$ tend vers zéro lorsque $r \to 0^+$. En choisissant les paramètres r et s d'une manière convenable, nous garantissons donc que les quantités α_0, β_0 et ε_0 sont suffisamment petites.

Taux de réussite : 5% (MPI - 5%).

Question 12 Question sans difficulté majeure.

Taux de réussite : 69% (MPI - 58%).

Question 13 Question assez technique. Pour obtenir les relations de récurrence pour les quantités $(\alpha_i, \beta_i, \varepsilon_i)_{i \geqslant 0}$ introduites à la question *10*, nous devions nous appuyer sur la relation de la question *12* et utiliser les inégalités de la question *9b*.

Taux de réussite : 14% (MPI - 12%).

Cette question a donné le coup d'arrêt au travail d'une grande majorité des candidats.

Question 14 Question techniquement difficile et dans l'esprit des questions *11*, *12*, *13*. La démarche générale consiste à montrer les trois inégalités dans la même récurrence pour exploiter leurs interdépendances. L'un des points clés de la réponse à cette question est l'emploi d'inégalités de la question *13* qui étaient utiles pour minorer certains dénominateurs (et, par conséquent, de majorer certaines fractions).

Même parmi les copies ayant globalement traité la question, de nombreuses justifications sont absentes.

Taux de réussite : 12% (MPI - 11%).

Question 15a Dans cette question, il s'agit d'écrire la suite $F_i - F_0$ comme la somme partielle d'une série et de vérifier la convergence normale pour la norme $\| \cdot \|_{r,s}$. Par l'analogie (qui devait être également démontrée !) avec la question *5*, nous pouvions conclure sur la convergence de la suite $(F_i)_{i \geqslant 0}$ dans $\mathcal{D}_r(\mathbb{R}_n[X])$.

Taux de réussite : 5% (MPI - 4%).

Question 15b Question difficile et très peu abordée. Elle requiert une bonne maîtrise de la Partie II du sujet. La première étape était de construire un « bon » candidat G pour le théorème 1. Pour cela, nous pouvons songer à la notation $F_i, R_i,\ i \geqslant 0$ introduite à la question *10* et à la question précédente. Nous pouvions alors écrire

$$P = F_i \cdot Q_i + R_i,$$

la division euclidienne de P par F_i. La deuxième étape est de montrer que les polynômes F_i et Q_i convergent dans $\mathcal{D}_r(\mathbb{R}_n[X])$ (*cf.* question *15a*) et, de surcroît, $R_i \to R = 0$ dans $\mathcal{D}_r(\mathbb{R}_n[X])$.

Taux de réussite : 5% (MPI - 5%).

Question 16 Il s'agit ici de faire un changement de variable $P(X+\lambda)$ pour se ramener au cas où $\lambda = 0$. Ce dernier cas a été traité à la question précédente.

Taux de réussite : 6% (MPI - 5%).

Question 17 Cette question se fait par l'application du théorème 1 au polynôme $P = X^2 - f$; la question a été considérée par très peu.

Taux de réussite : moins de 1% (MPI - 0%).

4.3 Troisième Partie

Question 18 Pour répondre à la question, il suffit d'appliquer le théorème spectral pour des matrices symétriques. Certains candidats ont redémontré que les valeurs propres d'une matrice symétrique étaient réelles. Ceci n'était pas exigé par les correcteurs.

Taux de réussite : 60% (MPI - 69%).

Question 19 Question facile et plutôt bien traitée.

Taux de réussite : 29% (MPI - 34%).

Question 20 Cette question ne porte que sur la matrice $M(t)$ évaluée en $t = 0$, notée M_0. C'est donc une question d'algèbre linéaire sur les réels. Le théorème de décomposition des noyaux est la clé d'une des possibles démonstrations. Nous pouvons aussi réduire M_0 en utilisant le théorème spectral et utiliser le théorème de Cayley-Hamilton. Cette seconde méthode a été très peu employée.

Taux de réussite : 6% (MPI - 1%).

Question 21 Il s'agit de montrer que les coefficients de Q^{-1} sont DSE au voisinage de 0. Cela se fait (comme souvent pour les propriétés qualitatives de l'inverse) en utilisant la formule de Cramer

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det Q}\,{}^t\mathrm{Com}(Q).$$

La question *6* montre que la fonction $\det Q$ est inversible avec l'inverse appartenant à $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ avec $\rho > 0$ suffisamment petit.

Taux de réussite : 4% (MPI - 3%).

Question 22a Question simple qui consiste à reformuler l'inversibilité de la matrice $Q_a = (B_a U \mid A_a V)$ d'une manière équivalente.

Taux de réussite : 6% (MPI - 2%).

Question 22b Question sur les matrices réelles. Le théorème de Cayley-Hamilton et le théorème du rang permettent de conclure.

Taux de réussite : 3% (MPI - 4%).

Question 23 La question consiste à interpréter le fait pour une matrice d'être diagonale par blocs comme la stabilité de certains sous-espaces vectoriels par l'application linéaire associée.

Taux de réussite : 3% (MPI - 0%).

Question 24 La réponse à cette question découle immédiatement du théorème de Cayley-Hamilton et du fait que les matrices A_a et B_a sont des polynômes en $M_{|t=a}$ (et donc symétriques).

Taux de réussite : 1% (MPI - 0%).

Question 25 L'idée générale de la solution est d'interpréter la question comme une forme du procédé de Gram-Schmidt « en famille ». La question *17* permet de traiter les racines carrées qui apparaissent dans cette construction.

Taux de réussite : 0% (MPI - 0%).

Question 26 Ici, l'idée de départ est de mettre en place une récurrence sur la taille des matrices et d'utiliser les questions précédentes (essentiellement la totalité de la Partie III du sujet). En d'autres mots, il s'agit d'une adaptation de la méthode classique de la théorie de la réduction des matrices. Cette question est donc plus abordable et a été traitée par quelques candidats. Taux de réussite : 1% (MPI - 0%).