Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet proposé porte sur l'étude de différentes applications autour de la formule de Stirling. La première partie très progressive et très classique met essentiellement en oeuvre des chapitres fondamentaux de première et seconde année que sont l'intégration sur un segment, les primitives, l'intégration sur un intervalle quelconque et les intégrales à paramètres, avec l'utilisation du théorème dérivation et de convergence dominée.

La seconde partie consiste à démonstrer de la formule de Stirling et d'en obtenir une amélioration. Diverses notions d'analyses sont ici évaluées : définition de limite ou d'équivalent, de prolongement par continuité, développements limités, séries numériques et comparaison série-intégrale.

La troisième partie traite d'une marche aléatoire à l'aide de séries entières. Les méthodes et outils usuels sur les séries entières sont mis en œuvre : calcul de rayon de convergence, de développement en série entière, produit de Cauchy.

La quatrième partie porte sur le cas particulier d'une marche aléatoire symétrique avec pour objectif d'obtenir la loi de l'Arcsinus. On utilise des arguments de dénombrements, de calculs de probabilités usuels, mais aussi de l'analyse avec les sommes de Riemann.

Analyse globale des résultats

Le sujet proposé aux candidats pour cette session se présentait sous une forme légèrement plus longue que la précédente, avec une difficulté raisonnable excepté les dernières questions présentant et utilisant le principe de réflexion. Néanmoins, les meilleurs candidats ont été en mesure de traiter presque toutes les questions avec rigueur et une rédaction claire. Toutes les questions du sujet ont été traitées au moins en partie par plusieurs candidats. L'indépendance de plusieurs parties et la présence de questions très classiques ont permis aux candidats d'avancer dans le sujet ce qu'à pu noter le jury avec la présence importante de copies fournies.

Du point de vue du fond, comme le rapport le détaille plus bas, beaucoup de candidats ont des difficultés à voir l'enchainement et l'objectif des différentes questions, ce qui les bloque lors des questions d'application ou de synthèse.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Les parties I à III ont été abordées par presque tous les candidats.

Partie I

Cette partie est une version très guidée d'une méthode classique permettant d'obtenir la valeur de l'intégrale de Gauss à l'aide d'intégrales à paramètres. Elle a permis aux candidats sérieux d'entrer en confiance dans le sujet.

Q1. Il s'agissait d'établir la convergence absolue d'une intégrale. Beaucoup de candidats oublient la continuité et parlent de convergence sans précision de signe. Cette première question donne bien souvent une indication de la suite de la copie.

Q2. Les résultats de première année sur l'intégrale de fonction continue sur un segment suffisait.

Q3. Le théorème de dérivation est souvent bien connu, en revanche, les dominations locales sont souvent fausses à cause du signe des bornes. Peu de candidats pensent à utiliser la parité.

Q4. Le théorème fondamental de l'analyse a aussi des hypothèses.

Q5. - Q6. Bien réussies dans l'ensemble.

Q7. Intervertir une limite et une intégrale nécessite des hypothèses. Le passage de $\lim g^2$ à $\lim g$ se fait trop souvent sans précisions.

Partie II

Cette partie était l'occasion de mettre en œuvre des compétences très classiques, mais parfois délicates d'analyse : domination, étude locale, développements limités, encadrements...

Q8. On retrouve les mêmes défauts qu'en **Q1.**.

Q9. Très classique. Il faut néanmoins se rappeler que l'on manipule des intégrales généralisées et appliquer le théorème adapté.

Q10. Il fallait trouver le bon changement de variables. Un certain nombre de candidats, en « réussissant » à obtenir le résultat avec des calculs faux, perdent leur crédibilité aux yeux du correcteur.

Q11. Question très peu réussie. La manque de méthode (simplement fixer la variable, puis faire varier n) pour l'étude de la convergence simple est à déplorer. Beaucoup de limites dépendent encore de n.

Q12. Assez bien réussie, même si certains ne parlent que du prolongement en 0.

Q13. Bien peu de candidats s'émeuvent de diviser par une quantité pouvant s'annuler.

Q14. C'était la question la plus délicate de cette partie. Peu de candidats comprennent l'enchainement de questions, en particulier l'utilité de la fonction q. Certains pensent que l'étude de la monotonie de q revient à étudier $q(x+1) - q(x)$.

Q15. Traitée par moins d'un tiers des candidats, et correctement par un tiers de ces derniers. La résolution de cette question, en particulier l'application du théorème de convergence dominée, était pourtant cousue de fil blanc.

Q16. Le calcul du développement asymptotique a été plutôt bien mené. En revanche, l'utilisation de théorème de comparaison nécessite de parler de positivité.

Q17. - Q18. Il s'agissait de démontrer le théorème de sommation d'équivalents. La référence à la positivité de (b_n) est souvent absente.

Q19. - Q20. Très classiques et bien réussies.

Q21. Traitée dans la moitié des copies, et entièrement réussie dans la moité des cas. Il suffisait à nouveau d'être capable d'utiliser les résultats des questions précédentes.

Q22. Très peu traitée. Beaucoup ne voyaient pas comment démarrer.

Partie III

On peut noter un manque global de formalisation en probabilité avec par exemple, des découpages d'événements sans union dont la probabilité s'écrit miraculeusement sous forme de somme, l'utilisation de l'indépendance sans préciser de quelles variables ou de quels événements il est question, le remplacement de variables aléatoires dans un événement... Peu de candidat jugent utile d'utiliser les propriétés admises en introduction de cette partie.

Q23. Presque tout les candidats ont traité cette question. En revanche, beaucoup d'entre-eux ont affirmé que S_n suivait la loi binomiale. Pour cette loi, il était attendu qu'elle soit justifiée.

Q24. Traitée dans 60 % des copies. Elle a été plutôt bien réussie.

Q25. Beaucoup de contorsions pour « justifier » la relation donnée, parfois en contradiction avec la réponse donnée en **Q23.**.

Q26. La règle de d'Alembert pour les séries entières ne s'appliquait pas directement. L'application de la règle pour les séries numériques a été utilisée mais rarement proprement : trop souvent la rédaction se limite à un quotient (éventuellement non défini) et une limite puis immédiatement une conclusion sur le rayon. Ceux qui ont utilisé la formule de Stirling à cette étape s'en sont bien sortis.

Q27. Il fallait discuter sur la valeur du rayon de la série. Peu nombreux sont ceux qui ont envisagé tous les cas possibles.

Q28. Les développements usuels sont bien connus et les candidats sont à l'aise pour l'exprimer à l'aide de factorielles. En revanche, pour certains, la notion de domaine de validité d'un tel développement semble inconnu ou inutile.

Q29. La direction initiale était donnée, peu l'ont suivie. Certains candidats sont prêts à toutes les entourloupes pour obtenir la relation donnée. Ce qui fait que près de la moitié des copies abordant la question n'obtient presque aucun point.

Q30. Question discriminante, le résultat n'était pas donné. Il fallait faire le produit de Cauchy avec soin.

Q31. Bien réussie par ceux ayant obtenu une relation correcte. Bien que l'énoncé le précise, beaucoup ignorent à nouveau de donner le domaine de validité de la formule.

Q32. Comme en **Q27.**, il fallait discuter suivant la valeur du rayon de convergence de la série entière définissant B.

Q33. Rarement traitée. La description de l'événement étudié a pausé problème.

Partie IV

Cette dernière partie de sujet n'a été abordée que dans 38 % des copies.

Q34. - Q36. À nouveau, manque de formalisation pour ce dénombrement classique. Beaucoup de verbiage pour paraphraser l'énoncé. L'équiprobabilité des chemins pour **Q35.** était attendue.

Q37. - Q42. Questions délicates qui ont permis de mettre en avant les bons candidats.

Q43. - Q44. Les candidats à l'aise en analyse ont trouvé ici chaussure à leur pied. Parfois des tentatives de grapillage de candidats désoeuvrés. On rappelle que le théorème sur les sommes de Riemann a des hypothèses.

Q45. - Q46. Seules les très bonnes copies (une quarantaine) traitent ces questions.

Concernant la forme, une quantité non-négligeable de copies ne respecte pas les standards de présentations qui peuvent être attendus pour de futurs ingénieurs : écriture claire, lisible, propos structuré, mise en avant des résultats ; mais aussi des standards relatifs à un concours scientifique : répondre effectivement à la question posée, penser à conclure, citer les résultats ou les questions précédentes utilisés, vérifier les hypothèses de validité. Ces copies sont donc pénalisées comme prévu dans la notice de l'épreuve. Le jury encourage vivement les candidats à utiliser un brouillon et à ne pas commencer systématiquement la rédaction sitôt l'énoncé entre les mains.

Conclusion

Le jury encourage vivement les candidats à utiliser un brouillon et à ne pas commencer systématiquement la rédaction aussitôt l'énoncé lu. Il faut privilégier la qualité sur la quantité, dans la présentation et surtout dans la précision de l'argumentation. Les candidats qui avancent dans un sujet de manière presque linéaire, en donnant tous les arguments importants, qui signalent honnêtement les manques ou les incohérences de leurs propositions ont toujours d'excellentes notes.

Il est important de noter qu'un problème n'est pas une succession d'exercices indépendants. Il est utile de chercher à comprendre l'objectif des questions posées.

Enfin, le jury ne peut qu'encourager les candidats à mettre l'accent sur le cours et les méthodes de résolutions ; ce n'est qu'en maitrisant ces points que l'on peut rechercher et proposer des solutions cohérentes à de nouveaux problèmes.