1.6 Mathématiques 2 - filière PC

1.6.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet de l'épreuve couvrait une bonne partie du programme d'Algèbre Linéaire, de Probabilités et d'Analyse. L'objectif du problème posé était, premièrement de construire une chaîne de Markov sur un espace fini à temps continu, et ensuite, sous condition de réversibilité, d'établir la convergence vers la mesure invariante et d'estimer la vitesse de cette convergence en relation avec le spectre de la matrice de transition.
Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe D.

1.6.2 Conclusion

Dans les copies les plus faibles, les correcteurs ont noté des confusions entre les matrices, les vecteurs et les scalaires ou bien entre les probabilités, les événements et les variables aléatoires.
Apprendre le cours est toujours nécessaire pour réussir.
Pour chaque question, les correcteurs attendent des arguments justes et précis. Mais il est fortement conseillé de les rendre courts. En effet, les candidats qui se lancent dans une rédaction trop longue ne sont pas recompensés par les correcteurs pour la longueur et se trouvent pénalisés par manque de temps pour réussir d'autres questions.

1.7 Mathématiques 1 - filière PSI

1.7.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet de maths 1 PSI s'intéresse à différentes inégalités de convexité portant sur des fonctions définies sur $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Les thèmes abordés sont l'analyse de première année (notamment la convexité), l'algèbre linéaire, l'algèbre bilinéaire. Le théorème spectral joue un rôle essentiel. Les fonctions vectorielles apparaissent en fin de problème.

La première partie reprend des résultats très classiques, proches du cours : l'équivalence entre positivité d'une matrice symétrique et positivité du spectre ; la convexité de l'ensemble des matrices symétriques (définies) positives ; l'existence d'une racine carrée pour une matrice symétrique définie positive ; l'inégalité de convexité (Jensen).

La deuxième partie, assez élémentaire, démontre et améliore une inégalité classique portant sur la trace et le déterminant.

La troisième partie, nettement plus difficile, montre la log-concavité du déterminant sur $S_n^+(\mathbb{R})$.

La quatrième partie est courte et facile ; on y majore le logarithme du déterminant de $A + tI_n$ à l'aide de la trace de A.

Enfin, la cinquième partie fait établir les développements limités de $t \mapsto \det(A + tM)$ et de $t \mapsto (A + tM)^{-1}$, afin d'obtenir un comportement asymptotique de $(\det(1 + tM))^{-\alpha}$ pour $\alpha > -1/n$ fixé.

Les questions sont de difficultés variées. Certaines sont très proches du cours, d'autres demandent une bonne maîtrise des théorèmes, d'autres enfin sont vraiment difficiles. Elles ont permis aux candidats de montrer leurs diverses qualités. L'échelonnement des notes est très satisfaisant.
Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe E.

1.7.2 Conclusion

La maîtrise des techniques et des résultats du cours est indispensable pour réussir les concours. C'était particulièrement le cas pour ce sujet, qui demandait en particulier une bonne maîtrise de l'algèbre bilinéaire. Beaucoup de candidats ont su montrer leurs qualités sur des questions assez techniques.

Rappelons pour terminer que la qualité de la rédaction et la présentation sont prises en compte dans l'évaluation des copies. Les correcteurs apprécient notamment que les résultats soient soulignés, que les copies ne soient pas un jeu de piste et que les ratures soient propres ! Enfin, certaines copies écrites avec une encre gommable sont un peu difficiles à lire ; ce type de stylo est donc à éviter.

1.8 Mathématiques 2 - filière PSI

1.8.1 Présentation générale et intérêt scientifique du sujet

Le sujet avait trait à plusieurs modes d'approximation des lois de Poisson par des lois à support fini. Dans un premier temps (partie **I**), on étudiait la probabilité qu'une permutation d'un ensemble à n éléments soit un dérangement, par la méthode des séries entières génératrices, puis la loi du nombre X_n de points fixes d'une permutation d'un ensemble à n éléments. On démontrait, lorsque n tend vers $+\infty$, la convergence en loi de X_n vers la loi de Poisson de paramètre 1.
La deuxième partie du sujet étudiait une mesure effective de l'écart entre deux lois sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$: la mesure en question est la **distance de variation totale**, dont on montrait à la question 10 qu'elle vérifiait les axiomes d'une distance sur l'ensemble des familles positives sommables de somme 1 (que l'on peut identifier à l'ensemble des lois de probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$).
L'objectif essentiel, dans le reste du problème, était de quantifier la convergence observée en partie **I** au sens de cette mesure (questions 14 et 15), puis de faire de même pour l'approximation de la loi de Poisson de paramètre λ par la loi binomiale $\mathcal{B}(\backslash, \lambda/\backslash)$ (question 20) et l'approximation d'une loi de Poisson par une autre (question 22).
La stratégie, dans cette dernière partie, était de contrôler la distance de variation totale entre deux produits de convolution (opération sur les lois correspondant à l'addition de deux variables aléatoires entières indépendantes) en fonction des distances facteur à facteur. Les derniers résultats était obtenus par écriture de la loi binomiale $\mathcal{B}(\backslash, \lambda/\backslash)$ comme produit de convolution de n lois de Bernoulli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$, et de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ comme produit de convolution de n lois de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}\cdot$.

E Mathématiques 1 PSI

Q1 - La première question prouvait l'équivalence entre la positivité d'une matrice symétrique et la positivité de son spectre. Il s'agit d'une question de cours. Le sens direct est souvent bien traité ; la réciproque, nettement plus difficile, n'a été correctement rédigée que par un cinquième des candidats.
Q2 - La convexité de l'ensemble formé par les matrices (définies) positives demandait de vérifier le caractère symétrique de la $tA + (1-t)B$ et sa positivité. Le premier point a souvent été oublié. Pour la positivité, l'argument de coréduction des matrices A et B, vu également aux questions 10 et 11, est bien sûr incorrect.
Ces ensembles ne sont pas des sous-espaces vectoriels. Cela a été majoritairement montré pour $S_n^{++}(\mathbb{R})$ avec la matrice nulle, moins souvent pour $S_n^{+}(\mathbb{R})$ par exemple avec $-I_n$; on demandait ici un exemple explicite.
Q3 - Les candidats proposent en général une matrice solution. Plus rares sont ceux qui vérifient la symétrie et la positivité du spectre.
Q4 - L'inégalité de convexité (Jensen) est classique. La récurrence demande un certain soin, et assez peu de candidats ont su la mettre réellement en œuvre. Certains parlent de la linéarité de f, ce qui est évidemment faux.
Q5 - La convexité de $-\ln$ a été démontrée par la grande majorité des candidats. L'inégalité entre la trace et le déterminant a été prouvée par une moitié des candidats. Le cas des matrices symétriques positives et non définies positives n'est vu que dans peu de copies.
Q6 - La question est généralement bien traitée, avec mention du théorème spectral.
Q7 - L'inégalité découle de la question 6. La preuve n'est pas toujours complètement convaincante, notamment pour l'inégalité entre la norme infinie et la norme deux.
Q8 - C'est sûrement la question la plus difficile du sujet ; elle aurait clairement mérité une indication. Elle n'a été traitée que par une poignée de candidats.
Q9 - La question est très facile. Le calcul de la dérivée seconde n'est cependant pas toujours juste.
Q10 - Cette question est difficile. Il fallait utiliser les questions 8 et 9, ce qui n'était pas indiqué. Elle est tout de même vue dans les bonnes copies.
Q11 - Elle est un peu plus facile que la précédente, et traitée un peu plus souvent.
Q12 - Il suffit ici de passer au logarithme népérien, ce qui très souvent vu. Il fallait cependant conclure à la concavité et non à la convexité.
Q13 - La question n'est pas difficile et a été bien traitée par les candidats l'ayant abordée.
Q14 - L'inégalité est presque immédiate avec la question 13.
Q15 - On pouvait ici utiliser le caractère polynomial du déterminant ou bien le résultat de la question 8. Les deux arguments sont souvent donnés.
Q16 - Certains connaissaient le caractère ouvert de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Dans le cas traité ici, on peut conclure assez facilement avec la question 8.
La suite du sujet a été réellement abordée par assez peu de candidats.

RETOUR