ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2023

JEUDI 20 AVRIL 2023
08h00 - 14h00

FILIERE MP - Epreuve n° 7

MATHEMATIQUES D (U)

Durée : 6 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Le sujet comprend 6 pages, numérotées de 1 à 6.

Début de l'épreuve.

Notations et conventions :

Soit A un anneau commutatif dont on note 1 l'élément unité. Par convention, on pose $x^0 = 1$ pour tout x de A. On rappelle que A est dit *intègre* s'il n'est pas réduit à $\{0\}$ et si l'égalité $xy = 0$ avec $x, y \in A$ implique $x = 0$ ou $y = 0$. Tout anneau intègre est un sous-anneau de son corps des fractions $\operatorname{Frac} A$.

On note $\mathbf{Z}[X_1, ..., X_r]$ l'anneau (dont on supposera connu qu'il est intègre) des polynômes en n indéterminées à coefficients entiers. Un tel polynôme s'écrit par définition de manière unique comme une somme finie de monômes de la forme $\alpha X_1^{i_1} X_2^{i_2} ... X_r^{i_r}$ avec $\alpha \in \mathbf{Z}$ (où les multi-indices $(i_1, i_2, ..., i_r) \in \mathbf{N}^r$ sont deux à deux distincts) ce qui permet pour tout anneau commutatif A et tout élément $F \in \mathbf{Z}[X_1, ..., X_r]$ de définir une fonction $(a_1, ..., a_r) \mapsto F(a_1, ..., a_r)$ de A^r dans A.

Si A est un anneau commutatif et r, s des entiers strictement positifs, on note $M_{r,s}(A)$ le groupe additif des matrices à coefficients dans A possédant r lignes et s colonnes et pour tout entier $n > 0$, on note $M_n(A) = M_{n,n}(A)$ l'anneau des matrices carrées de taille n à coefficients dans A. On note I_n la matrice identité de $M_n(A)$. Soit $M \in M_n(A)$, on note $\widetilde{M}$ la transposée de la comatrice de M. On rappelle que si A est un corps, on a :

$$M\widetilde{M} = \widetilde{M}M = (\det M)I_n,$$

et également dans ce cas $\det(MN) = \det M . \det N$ pour toutes matrices M, N de $M_n(A)$. Si E est un espace vectoriel sur un corps commutatif K, on note $E^\vee$ le dual de E ; pour tout sous-espace vectoriel F de $E^\vee$, on note $F^\perp$ le sous-espace de E constitué des vecteurs x tels que $u(x) = 0$ pour tout u de F.

Soit $(M, +)$ un groupe abélien. On dit que M a la *propriété (F)* s'il existe une partie finie S de A telle que S engendre le groupe M. Si A est un anneau, on dit qu'il a la propriété (F) si son groupe additif $(A, +)$ a cette propriété.

Soient A un anneau commutatif et S une partie de A. On note $\mathcal{A}(S)$ l'ensemble des éléments x de A qui s'écrivent comme un polynôme à coefficients entiers en des éléments de S, c'est-à-dire des $x \in A$ tels qu'il existe un entier $r \geq 1$, des éléments $s_1, ..., s_r$ de S, et un polynôme $F \in \mathbf{Z}[X_1, ..., X_r]$ tels que $x = F(s_1, ..., s_r)$. L'ensemble $\mathcal{A}(S)$ est un sous-anneau de A (on ne demande pas de le vérifier). On dit qu'un anneau commutatif A a *la propriété (TF)* s'il existe une partie finie S de A telle que $A = \mathcal{A}(S)$.

Le but général du problème est d'étudier des propriétés de finitude dans les groupes abéliens et les anneaux commutatifs qui étendent la notion d'espace vectoriel de dimension finie (parties I et II), puis d'en déduire des applications aux matrices à coefficients dans un anneau commutatif quelconque (parties III et IV). La partie V (indépendante des autres) détermine la dimension maximale de sous-espaces de matrices dont tous les éléments sont de "petit" rang.

Les diverses parties du problème sont très largement indépendantes les unes des autres ; il est autorisé d'admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Partie I : Exemples et contre-exemples pour les propriétés (F) et (TF)

1. Soit A un anneau commutatif. Montrer que si A a la propriété (F), alors il a la propriété (TF).

2. Soit A un anneau commutatif. Soient S_1 et S_2 deux parties de A telles que $S_1 \subset \mathcal{A}(S_2)$. Montrer que $\mathcal{A}(S_1) \subset \mathcal{A}(S_2)$.

3. Montrer que tout groupe abélien fini et le groupe additif $\mathbf{Z}^r$ pour $r \in \mathbf{N}^*$ ont la propriété (F).

4. Montrer que si n est un entier strictement positif, l'anneau $\mathbf{Z}[X_1, ..., X_n]$ a la propriété (TF), mais pas la propriété (F).

5. Montrer que l'anneau $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels n'a pas la propriété (TF).

Partie II : Comportement des propriétés (F) et (TF) vis à vis des morphismes

1. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux commutatifs. Soit F un élément de $\mathbf{Z}[X_1, ..., X_n]$. Montrer qu'on a $f(F(a_1, ..., a_n)) = F(f(a_1), ..., f(a_n))$ pour tous $a_1, ..., a_n \in A$.

2. Soit B un anneau commutatif. Soient n un entier strictement positif et $b_1, ..., b_n$ des éléments de B.

a) Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux f de $\mathbf{Z}[X_1, ..., X_n]$ dans B tel que $f(X_i) = b_i$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.

b) En déduire que B a la propriété (TF) si et seulement s'il existe un entier $n \geq 1$ et un morphisme surjectif d'anneaux $\mathbf{Z}[X_1, ..., X_n] \to B$.

c) Montrer qu'un groupe abélien M a la propriété (F) si et seulement s'il existe un entier $r \geq 1$ et un morphisme surjectif de groupes $\mathbf{Z}^r \to M$.

d) Soient A et B des anneaux commutatifs tels qu'il existe un morphisme surjectif d'anneaux de A vers B. Montrer que si A a la propriété (TF), alors il en va de même de B. Énoncer et démontrer un énoncé analogue pour la propriété (F).

3. Soit M un sous-groupe additif de $\mathbf{Z}^n$ avec $n \in \mathbf{N}$ (on convient que $\mathbf{Z}^0$ est le groupe trivial). On se propose de démontrer par récurrence sur n le résultat suivant :

(*) Il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que le groupe abélien M soit isomorphe à $\mathbf{Z}^r$.

a) Vérifier les cas $n = 0$ et $n = 1$. On suppose maintenant le résultat vrai pour $n-1$. Soit $p : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z}$ la projection sur la première coordonnée, on note N le noyau de p et $N_1 = M \cap N$, puis on pose $p(M) = a\mathbf{Z}$ avec $a \in \mathbf{Z}$. On choisit $e_1 \in M$ tel que $p(e_1) = a$. Montrer que si $a \neq 0$, alors l'application

$$N_1 \times \mathbf{Z} \to M,\ (x, m) \mapsto x + me_1$$

est un isomorphisme de groupes.

b) En déduire (*).

c) Montrer que l'entier r tel que M soit isomorphe à $\mathbf{Z}^r$ est unique (on pourra considérer le rang d'une famille de vecteurs de $\mathbf{Z}^r$ dans le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}^r$).

4. Montrer que si un groupe abélien M a la propriété (F), alors tout sous-groupe de M l'a également.

5. On considère l'anneau $A = \mathbf{Z}[X, Y]$. Soit U l'ensemble des éléments de A de la forme XY^k avec $k \in \mathbf{N}$, on pose $B = \mathcal{A}(U)$. Soit S une partie finie de B.

a) Montrer qu'il existe $m \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathcal{A}(S) \subset \mathcal{A}(\{X, XY, ..., XY^m\})$.

b) Montrer qu'il existe un entier $N > 0$ tel que tout élément de $\mathcal{A}(S)$ soit somme de monômes de la forme $\alpha X^i Y^j$ avec $\alpha \in \mathbf{Z}$ et $j \leq iN$.

c) En déduire que l'anneau B n'a pas la propriété (TF).

Partie III : Déterminants sur un anneau commutatif

Dans toute cette partie, on désigne par A un anneau commutatif. On note A^* le groupe multiplicatif des éléments inversibles de A.

1. Soit E un sous-ensemble fini de $M_n(A)$. Montrer qu'il existe un sous-anneau B de A tel que : B a la propriété (TF) et pour toute matrice $M \in E$, tous les coefficients de M appartiennent à B.

2. Soit M une matrice de $M_n(A)$. Le but de cette question est de généraliser à l'anneau commutatif quelconque A les deux formules rappelées dans l'introduction quand A est un corps.

a) Montrer que si l'anneau A est intègre, alors $M\widetilde{M} = \widetilde{M}M = (\det M)I_n$.

b) On ne suppose plus A intègre. Montrer que le résultat de a) est encore vrai s'il existe un morphisme surjectif d'anneaux $B \to A$ avec B intègre.

c) En déduire que le résultat de a) vaut encore pour tout anneau commutatif A.

d) Démontrer que si M et N sont dans $M_n(A)$, alors on a

$$\det(MN) = \det M \times \det N.$$

3. Soient r et s des entiers strictement positifs. Soit $M \in M_{s,r}(A)$. On considère l'application $u : A^r \to A^s$ définie par $u(X) = MX$, où on identifie les éléments de A^r et A^s à des vecteurs-colonne. On suppose que u est surjective et que l'anneau A n'est pas réduit à $\{0\}$. Le but de cette question est de démontrer qu'on a alors $r \geq s$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant $r < s$.

a) Montrer qu'il existe une matrice $N \in M_{r,s}(A)$ telle que $MN = I_s$.

b) On définit des matrices de $M_s(A)$ par blocs :

$$M_1 = \begin{pmatrix} M & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, M_1 est la matrice obtenue en ajoutant $s - r$ colonnes nulles à M et N_1 est la matrice obtenue en ajoutant $s - r$ lignes nulles à N. Calculer $M_1 N_1$.

c) Aboutir à une contradiction et conclure.

d) On suppose que $r = s$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

i) L'application u est surjective ;

ii) Le déterminant $\det M$ appartient à A^* ;

iii) Il existe $N \in M_r(A)$ telle que $MN = NM = I_r$.

iv) L'application u est bijective.

Partie IV : Équivalence de matrices de $M_n(\mathbf{Z})$ et $M_n(\mathbf{C})$

Dans toute cette partie, on désigne par r et s des entiers strictement positifs. Soit A un anneau commutatif non réduit à $\{0\}$. On note $GL_r(A)$ l'ensemble des matrices de $M_r(A)$ qui vérifient les propriétés équivalentes de la question II.3.d).

1. a) Montrer que la multiplication des matrices induit une structure de groupe sur $GL_r(A)$.

b) On définit une relation sur $M_{s,r}(A)$ par $M \sim N$ si et seulement s'il existe $U \in GL_s(A)$ et $V \in GL_r(A)$ telles que $N = UMV$. Montrer que c'est une relation d'équivalence.

On dit que deux matrices M et N de $M_{s,r}(A)$ sont *A-équivalentes* si $M \sim N$. Si $M \in M_{s,r}(\mathbf{Z})$ et k est un entier au plus égal à $\min(r, s)$, on note $m_k(M)$ le pgcd des mineurs de taille k de M.

2. Soient M et N deux matrices $\mathbf{Z}$-équivalentes de $M_{s,r}(\mathbf{Z})$. Montrer que pour tout $k \leq \min(r, s)$, on a $m_k(M) = m_k(N)$ (on pourra commencer par montrer que $m_k(M)$ divise $m_k(N)$).

3. On concidère deux matrices de $M_2(\mathbf{Z})$ qui sont $\mathbf{C}$-équivalentes. Sont-elles toujours $\mathbf{Z}$-équivalentes ?

Partie V : Sous-espaces de $M_n(\mathbf{C})$ constitués de matrices de petit rang

Soient r et m des entiers strictement positifs avec $r \leq m$. On considère un sous-espace V du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $M_m(\mathbf{C})$. Dans toute la suite, on fait l'hypothèse suivante : tout élément de V est une matrice de rang au plus r.

Le but de cette partie est de démontrer qu'on a alors l'inégalité :

$$\dim V \leq mr.$$

1. Montrer qu'on peut supposer que V contient la matrice-bloc :

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans toute la suite, on fera cette hypothèse.

2. a) Soit B un élément de V, qu'on écrit sous la forme d'une matrice-bloc :

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

où les quatre matrices $B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$ sont respectivement dans $M_r(\mathbf{C})$, $M_{r,m-r}(\mathbf{C})$, $M_{m-r,r}(\mathbf{C})$ et $M_{m-r}(\mathbf{C})$. Montrer que $B_{22} = 0$ et $B_{21}B_{12} = 0$ (on pourra considérer les mineurs de taille $r + 1$ de la matrice $tA + B$ pour $t \in \mathbf{C}$).

b) Soient B et C deux matrices de V, qu'on écrit sous forme de matrices-bloc comme ci-dessus :

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $B_{21}C_{12} + C_{21}B_{12} = 0$.

3. On note W l'intersection de V avec le sous-espace de $M_m(\mathbf{C})$ constitué des matrices-bloc de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

On définit une application linéaire φ de $M_m(\mathbf{C})$ dans $M_{r,m}(\mathbf{C})$ par

$$\varphi : \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \end{pmatrix}$$

(avec les notations de V.2 a)).

a) On écrit toute matrice C de $M_{r,m}(\mathbf{C})$ sous forme d'une matrice bloc $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \end{pmatrix}$ avec $C_{11} \in M_r(\mathbf{C})$ et $C_{12} \in M_{r,m-r}(\mathbf{C})$. Soit ψ l'application linéaire de W dans $M_{r,m}(\mathbf{C})^\vee$ qui envoie $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}$ sur la forme linéaire $C \mapsto \mathrm{Tr}\,(B_{21}C_{12})$. Soit $s = \dim W$. En utilisant l'application ψ, montrer que $\dim(\varphi(V)) \leq mr - s$.

b) En déduire que $\dim V \leq mr$.

4. a) Soient r, m, n des entiers strictement positifs tels que $r \leq n \leq m$. Montrer que si E est un sous-espace de $M_{m,n}(\mathbf{C})$ tel que tout élément de E soit une matrice de rang au plus r, alors $\dim E \leq mr$.

b) Donner un exemple de sous-espace E de $M_{m,n}(\mathbf{C})$ vérifiant $\dim E = mr$ et tel que tout élément de E soit une matrice de rang au plus r.

Fin du sujet.