SESSION 2024 PC8M

e3a POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul.
On note $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $2n$. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on note $e_k = X^k$ et $\mathscr{B} = (e_0, ..., e_{2n})$ la base canonique de E.
Pour tout polynôme P et Q de E, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t$ et on rappelle que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
Soit L l'application définie sur E par :

$$\forall\, P \in E,\quad L(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que L est une forme linéaire sur E.

2. Déterminer $L(e_k)$ pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$.

3. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(L)$.

4. Prouver qu'il existe une base $\mathscr{U}$, que l'on ne cherchera pas à expliciter, de $\mathrm{Ker}(L)$, dont le premier vecteur est e_1.

5. Montrer que :
i) $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont deux sous-espaces orthogonaux,
ii) $E = \mathrm{Vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L)$.

6. Soit λ un réel. On considère l'application T_λ définie sur E par :

$$\forall\, P \in E,\quad T_\lambda(P) = P + \lambda\, L(P)\, X$$

6.1. Vérifier que T_λ est un endomorphisme de E.

6.2. Soit $P \in E$. Calculer $(L \circ T_\lambda)(P)$.

6.3. Déterminer la matrice de T_λ dans une base de E adaptée à la décomposition obtenue aux questions **4.** et **5.**

6.4. Déterminer les valeurs propres de T_λ.

6.5. L'endomorphisme T_λ est-il diagonalisable ?

6.6. Justifier que T_λ est un automorphisme de E.

6.7. Pour tous réels α et β, préciser $T_\alpha \circ T_\beta$.

6.8. Déterminer T_λ^{-1}.

EXERCICE 2

On considère une variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Questions de cours

1.1. Rappeler sans démonstration la loi de X, son espérance et sa variance.

1.2. Écrire les développements en séries entières des fonctions **sh** et **ch** ainsi que leurs domaines de validité.

1.3. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes sur Ω.
Rappeler la définition de « X_1 et X_2 sont indépendantes ».

2. Soit Y une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X et définie par :

$$Y = 0 \text{ si } X \text{ est paire et } Y = 1 \text{ si } X \text{ est impaire.}$$

2.1. Exprimer les événements $\{Y = 0\}$ et $\{Y = 1\}$ à l'aide d'événements $\{X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.

2.2. En déduire la loi de Y et son espérance.
On donnera les résultats en utilisant les fonctions **exp**, **sh**, et **ch**.

3. Soit Z une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X, indépendante de X et telle que : $Z(\Omega) = \{1, 2\}$, avec $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = 2) = \dfrac{1}{2}$.
On pose $T = XZ$.

3.1. Préciser $T(\Omega)$.

3.2. Soit k un entier naturel.
En utilisant le système complet d'événements $(\{Z = 1\}, \{Z = 2\})$, exprimer la probabilité $\mathbb{P}(T = k)$ à l'aide de probabilités d'événements $\{X = j\}$ et $\{2X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.

3.3. Déterminer la loi de T.

3.4. Quelle est la probabilité que T prenne des valeurs paires ?
On donnera le résultat en utilisant les fonctions **exp**, **sh**, et **ch**.

EXERCICE 3

Question de cours

1. Soit x un réel positif. Comparer x et x^2.

*****

Soit $\alpha \in]0, 1[$.
On se propose d'étudier la série de terme général $a_n = \dfrac{\sin(n^\alpha)}{n}$, $n \geqslant 1$.

2. On pose pour tout $t \geqslant 1$, $\varphi(t) = \dfrac{\sin(t^\alpha)}{t}$.

2.1. Justifier que la fonction $t \mapsto \sin(t^\alpha)$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

2.2. Justifier que φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer φ'.

2.3. Montrer que l'on a : $\forall t \in [1, +\infty[, \ |\varphi'(t)| \leqslant \dfrac{1 + \alpha\, t^\alpha}{t^2}$.

2.4. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\forall t \in [n, n+1], \ |\varphi(t) - \varphi(n)| \leqslant \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)|t - n|.$$

3. On pose, pour tout $n \geqslant 1$: $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Prouver que l'on a : $\forall\, n \geqslant 1,\ |u_n - a_n| \leqslant \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$.

4. Convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

4.1. Démontrer que $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

4.2. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

5. Démontrer, à l'aide d'un changement de variable, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

6. En déduire que la série de terme général u_n converge.

7. Prouver que la série de terme général $u_n - a_n$ converge absolument.

8. Déduire des questions précédentes que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

9. ***On suppose* que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ est convergente.**

9.1. Montrer qu'alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente.

On pourra utiliser la question de cours.

9.2. Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.

On procédera comme à la question **4.2**.

9.3. On admet alors, en procédant comme précédemment, que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(2\,n^\alpha)}{n}$ est convergente.

Conclure sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

On pourra utiliser la formule de duplication : $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$.

EXERCICE 4

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soient P et Q deux éléments de E.

On note : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} b_k X^k$, où $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 2^{-n}\, P(n)\, Q(n)$ est absolument convergente.

2. On pose pour tous P et Q dans E : $(P|Q) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\, P(n)\, Q(n)$.

2.1. Montrer que : $(S|S) = 0 \iff S$ est le polynôme nul.

2.2. Démontrer alors que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3. Quelques calculs de sommes

3.1. Rappeler l'ensemble de définition de la fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ et sa somme.

3.2. Justifier que la série $\sum_{n \geqslant 0} e^{-nx}$ converge pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

3.3. Exprimer $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$ à l'aide de la fonction f et en déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.4. Soit $x > 0$. Exprimer à l'aide des fonctions usuelles, $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$.

3.5. Soit α un entier naturel, on pose $S_\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha 2^{-n}$.

Calculer S_0, S_1 et S_2.

On pourra utiliser les questions précédentes avec une valeur de x bien choisie.

On admettra que $S_3 = 26$ et $S_4 = 150$.

4. On cherche à calculer la distance du vecteur X^2 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ dans E muni du produit scalaire défini dans la question **2**.

4.1. Déterminer les réels a et b tels que $X^2 - aX - b$ soit orthogonal à 1 et à X.

4.2. Prouver que l'ensemble $\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}(n^2 - cn - d)^2,\ (c,d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ possède un minimum.

4.3. En déduire la distance recherchée.

FIN