SESSION 2024 **PSI1M**

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux problèmes et d'un exercice indépendants.
Chaque problème est constitué de parties indépendantes.

PROBLÈME 1

File d'attente

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

On s'intéresse à une file d'attente à un guichet. À l'instant 0, la file contient un client. On suppose qu'à chaque instant $k \in \mathbb{N}^*$ il peut arriver au plus un nouveau client dans la file.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si un nouveau client arrive à l'instant k et 0 sinon.

On suppose que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

On repère chaque client par un indice qui donne son ordre d'arrivée dans la file : par définition, le client initialement présent a pour indice $n = 0$, le premier nouvellement arrivé a pour indice $n = 1$, etc.

On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est la fonction notée G_X définie par :

$$G_X(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = j)t^j.$$

Partie I - Temps d'arrivée du n-ième client

Q1. On note T_1 la variable aléatoire égale au temps écoulé entre le temps 0 et le temps où arrive le client d'indice 1.
Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(T_1 = k) = (1-p)^{k-1}p$.

Q2. On note A l'événement « aucun nouveau client n'arrive dans la file ».
Exprimer A en fonction des événements $\{T_1 = k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\mathbf{P}(A)$. Interpréter.

Q3. Déterminer le rayon de convergence R de la fonction génératrice de T_1, puis calculer sa somme.

Q4. En déduire l'espérance et la variance de T_1.

Q5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'arrivée du client d'indice $n-1$ et le client d'indice n. On admet que les variables aléatoires T_n sont indépendantes et de même loi.
On note $D_n = T_1 + \ldots + T_n$ la variable aléatoire qui donne le temps d'arrivée du client d'indice n.
Calculer l'espérance, la variance et la fonction génératrice G_{D_n} de D_n.

Q6. Rappeler le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de $x = 0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
En déduire le développement en série entière de G_{D_n} en 0 et montrer que pour tout $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathbf{P}(D_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n, \\ \dbinom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie II - Étude du comportement de la file

II.1 - Une suite récurrente

Soient $a > 0$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(a(x-1)) \end{cases}$.

On s'intéresse au comportement de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$z_1 \in]0,1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = f(z_n).$$

Q7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in]0,1[$ et $z_{n+1} - z_n$ est du même signe que $z_2 - z_1$.

Q8. En déduire que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \in [0,1]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$.

Q9. Soit la fonction $\psi : \begin{cases}]0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) - a(x-1) \end{cases}$.
Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $0 \leqslant \psi(x) \iff f(x) \leqslant x$ et $\psi(x) = 0 \iff f(x) = x$.

Q10. On suppose dans cette question que $a \leqslant 1$.
Étudier le signe de ψ et montrer qu'elle ne s'annule qu'en $x = 1$. En déduire que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Q11. On suppose dans cette question que $a > 1$.
Étudier le signe de ψ et montrer que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet exactement deux solutions α et 1 avec $\alpha \in]0,1[$ qu'on ne cherchera pas à expliciter.
En distinguant les cas $z_1 \in]0,\alpha]$ et $z_1 \in]\alpha,1[$, montrer que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

II.2 - Groupes de clients

On suppose que les clients de la file d'attente sont servis suivant leur ordre d'arrivée par un unique serveur et que la durée de service de chaque client est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: pour tout $k \in \mathbb{N}$, le service a une durée k avec la probabilité $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

On rappelle qu'initialement, la file contient un unique client : le client d'indice 0.

On note S la variable aléatoire égale à la durée de service de ce client : comme à chaque instant il arrive au plus un nouveau client, il peut arriver entre 0 et S nouveaux clients pendant le temps de passage au guichet du client d'indice 0. Les variables S et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont supposées indépendantes.

On appelle « clients du premier groupe » les clients qui sont arrivés pendant que le client d'indice 0 était servi.
Par récurrence, pour tout $k \geqslant 2$, on définit les clients du k-ième groupe comme étant les clients qui sont arrivés pendant que ceux du $(k-1)$-ième groupe étaient servis.

Pour tout $k \geqslant 1$, on note V_k la variable aléatoire égale au nombre de clients du k-ième groupe.

Par construction, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si le n-ième groupe est vide, alors l'événement $\{V_k = 0\}$ est réalisé pour tout $k \geqslant n$.

Q12. Quelle est la situation concrète décrite par l'événement $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{V_n = 0\}$?

Q13. Quelle est la loi du nombre N_n de clients qui sont arrivés dans la file d'attente dans l'intervalle de temps $[\![1, n]\!]$?

Q14. Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbf{P}(V_1 = k | S = n)$.
En déduire que V_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Q15. On note $z_n = \mathbf{P}(V_n = 0)$. Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\mathbf{P}(Z) = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.

Q16. Justifier que pour tout $(j, n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}(V_{n+1} = 0 | V_1 = j) = \mathbf{P}(V_n = 0)^j$. On distinguera le cas $j = 0$.

Q17. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_{n+1} = \exp(\lambda p(z_n - 1))$.

Q18. Déterminer, suivant les valeurs de λp, la limite de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Interpréter.

EXERCICE

Équivalent de Stirling

Q19. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

Pour tout $x > 0$, on note :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t\,.$$

Q20. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(n) = (n - 1)!\,.$$

Q21. On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$ converge et qu'elle vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$.

Q22. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note $\rho_k = \ln k - \displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln t \,\mathrm{d}t$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln \Gamma(n) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t \,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k\,.$$

On remarquera que pour $n = 1$, par convention, la somme des ρ_k est nulle.

Q23. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\rho_k = \int_0^{\frac{1}{2}} (2\ln k - \ln(k+t) - \ln(k-t))\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right)\mathrm{d}t\,.$$

Q24. En déduire que $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \rho_k$ converge.

Q25. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, lorsque $n \to +\infty$:

$$\ln\Gamma(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln n - n + c + o(1)\,.$$

En déduire que lorsque $n \to +\infty$:

$$\Gamma(n) \sim e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}\,.$$

Q26. Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que $t \mapsto t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ est intégrable sur $]0, n]$ et on note :

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t\,.$$

Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n \mathrm{d}u\,.$$

Q27. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x > 0, \quad \Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}\,.$$

Q28. On définit la fonction $\mathbf{1}_{]0,n[}$ sur $\mathbb{R}_+$ en posant $\mathbf{1}_{]0,n[}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in]0,n[, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

En remarquant que $\Gamma_n(x) = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{]0,n[}(t)\, t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$, utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x).$$

En déduire que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}\,.$$

Q29. Montrer que pour tout $x > 0$, $\dfrac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

En déduire que $e^c = \sqrt{2\pi}$ où c est défini à la question **Q25**.

*On pourra faire appel aux résultats des questions **Q19** et **Q20**.*

PROBLÈME 2

Blocs de Jordan

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille p à coefficients réels. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $J_\lambda \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ par :

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Les matrices J_λ, dites « matrices de Jordan », sont particulièrement importantes dans la mesure où on peut montrer que si le polynôme caractéristique d'une matrice est scindé, alors elle est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont formés de matrices de Jordan.

On se propose de montrer dans un premier temps une propriété d'irréductibilité des blocs de Jordan. Dans un second temps, on étudie le caractère borné des solutions du système différentiel linéaire associé à une matrice de Jordan.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel k, tel que $M^k = 0$ est appelé indice de nilpotence de M.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

On dit qu'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^p$ est stable par un endomorphisme f de $\mathbb{R}^p$ si pour tout $x \in V$, $f(x) \in V$.

On note $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in E$, on définit :

$$\mathcal{N}(A) = \left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|X\| = \left(\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

On admet que $\mathcal{N}$ et $\|\cdot\|$ définissent des normes respectivement sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et E.

Partie I - Irréductibilité de J_λ

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $u_\lambda \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p)$ l'endomorphisme canoniquement associé à J_λ.

Q30. Calculer $u_0^2(e_j)$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ et en déduire J_0^2.
Calculer de même J_0^{p-1} et J_0^p. En déduire que J_0 est nilpotente d'indice p.

Q31. Montrer que $\mathrm{Sp}(u_\lambda) = \{\lambda\}$ et déterminer le sous-espace propre associé.

Q32. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$. Montrer que V est stable par u_λ si, et seulement si, V est stable par u_0.

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ stable par u_λ, de dimension $k \in [\![1, p]\!]$. On note v l'endomorphisme induit par u_λ sur V et $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k)$ une base de V, que l'on complète en une base $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p)$ de $\mathbb{R}^p$.

Q33. Quelle est la forme de la matrice de u_λ dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$?

Q34. En déduire que le polynôme caractéristique de v divise le polynôme caractéristique de u_λ et que $e_p \in V$.

Q35. Déduire de la question précédente qu'il n'existe pas de décomposition $\mathbb{R}^p = V \oplus W$ où V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^p$ stables par u_λ non réduits à $\{0\}$.

Partie II - Stabilité du système linéaire associé

On s'intéresse dans cette partie aux solutions du système différentiel :

$$(S) \quad X' = J_\lambda X\,.$$

Une solution de (S) est une fonction :

$$X : \begin{cases} \mathbb{R} \to E \\ t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_p(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

de classe C^1 telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = J_\lambda X(t)$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit la matrice carrée de taille p notée $\exp(tJ_\lambda)$ par :

$$\exp(tJ_\lambda) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k.$$

Q36. Montrer que si X_0 est un vecteur propre pour J_λ associé à la valeur propre λ, alors $\tilde{X} : t \mapsto e^{\lambda t} X_0$ est une solution particulière de (S).

Q37. On définit la fonction $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\ t \mapsto \exp(tJ_\lambda) \end{cases}$.

Montrer que φ est dérivable et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = J_\lambda \exp(tJ_\lambda) = \exp(tJ_\lambda) J_\lambda$.

Q38. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tJ_\lambda) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} J_0^k$.

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tJ_\lambda)$ est inversible, d'inverse $\exp(-tJ_\lambda)$.

Q39. Montrer que $X : t \mapsto X(t)$ est solution de (S) si, et seulement si, $Y : t \mapsto \exp(-tJ_\lambda)X(t)$ est constante.

En déduire que les solutions de (S) sont exactement les fonctions $X : t \mapsto \exp(tJ_\lambda)X_0$ où $X_0 \in E$.

Q40. Montrer que si $\lambda > 0$, (S) admet une solution non bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Q41. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et tout $X \in E$, on a $\|AX\| \leqslant \mathcal{N}(A)\|X\|$.
En déduire que si $\lambda < 0$, toutes les solutions de (S) sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Q42. Que dire concernant l'existence de solutions de (S) non bornées sur $\mathbb{R}_+$ si $\lambda = 0$?

FIN