Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet s'intéresse selon deux points de vue à la résolution de l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{K} \qquad f(x+1) - f(x) = h(x)$$

où $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et où $h : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est fixée. Autrement dit, on s'intéresse à chercher les fonctions $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ satisfaisant l'identité précédente.

Les questions sont réparties en quatre parties décrites ci-après.

La partie I qui est purement algébrique étudie la possibilité de résoudre l'équation si h est une fonction polynomiale. Par des arguments d'algèbre linéaire, le but des questions est de prouver l'existence de solutions f en toute généralité et également d'étudier le cas particulier $h(x) = x$.

La partie II contient des résultats préliminaires, notamment concernant l'aspect classique de reconstruction des coefficients d'une série entière en termes d'intégrales, afin d'étudier une suite d'intégrales qui jouera un rôle plus loin dans l'épreuve.

Dans la partie III, on montre comment les résultats de la partie précédente permettent de mettre en évidence le rôle d'une famille classique de polynômes, à savoir les polynômes de Bernoulli, pour revisiter les résultats de la partie I. En particulier, des solutions explicites f sont construites pour toute fonction polynomiale h (éclairant au passage les calculs élémentaires du cas particulier $h(x) = x$ étudié dans la partie I). Au passage, et bien que ce ne soit pas le cœur du sujet, une méthode de dérivation est développée pour construire les polynômes de Bernoulli.

La partie IV concerne le cas général où h est une fonction entière, c'est-à-dire développable en série entière avec un rayon ∞. Des arguments d'analyse plus fins sont nécessaires, notamment pour construire une suite de fonctions entières remplaçant les polynômes de Bernoulli.

Analyse globale des résultats

Le sujet commence par une partie nécessitant la maitrise d'arguments d'algèbre linéaire. Dans l'ensemble, l'algèbre linéaire semble être bien comprise par les candidats. De façon précise, malgré quelques défauts d'argumentation dus à des détails ou des oublis de la spécificité de la dimension finie, les applications linéaires (telles que présentées dans l'épreuve) semblent bien assimilées.

Les parties suivantes se concentrent sur les connaissances suivantes du programme d'analyse : majoration, intégration, interversion série-intégrale, convergence de série. Comme souvent, les questions élémentaires ont largement été abordées avec succès. La justification qu'aucun nombre complexe z ne peut satisfaire $e^{e^z} = 1$ et $|z| = 1$ ou encore la démonstration qu'une fonction polynomiale 1-périodique est forcément constante ont été de petits marqueurs révélateurs des bonnes copies.

Concernant la prestation des candidats, le bilan qui se dessine semble conforme à celui des années précédentes, à savoir que les candidats arrivent à apporter des réponses globalement satisfaisantes aux questions élémentaires mais la considération de questions d'analyse plus fine et une compréhension globale de l'architecture du sujet sont souvent les clés de l'obtention des meilleures notes.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Les parties I et II ont été abordées dans la quasi-totalité des copies.

La partie II est globalement bien réussie dans la moitié des copies. Elle nécessitait des connaissances élémentaires sur la théorie des séries entières et la possibilité d'effectuer des interversions séries-intégrales. Sur ce dernier point, les hypothèses d'interversion sont parfois mal connues.

Comme la partie II, la partie III a été moyennement réussie (des résultats satisfaisants dans à peu près la moitié des copies). On peut d'une certaine manière s'en féliciter car cette partie est plus technique.

La dernière partie IV fait monter encore d'un cran le niveau de technicité. Elle ne fut abordée que dans la moitié des copies et n'a été réussie que dans environ 10 % des copies.

On ne commente ci-après que la plupart des questions majoritairement traitées (celles de la sous-partie IV.B ont été très peu abordées de façon satisfaisante). Nous focaliserons parfois notre attention sur les erreurs remarquées afin que cela puisse servir aux futurs candidats.

Q1. Comme évoqué ci-dessus, la définition d'une application linéaire est bien comprise. Cette question a été réussie dans à peu près 90 % des copies.

Q2. Il s'agit de calculer le degré du polynôme $P(X+1)-P(X)$. Voici une série d'écueils remarqués :

- dans certaines copies, on écrit la formule généralement fausse $\deg(P-Q)=\deg(P)-\deg(Q)$;
- dans beaucoup de copies (dans le cas $\deg(P)\geqslant 1$), on décompose $P(X+1)-P(X)$ en une somme de polynômes de degrés $\deg(P)-1$ et on conclut hâtivement que le degré total est forcément $\deg(P)-1$ sans justifier que les coefficients des monômes de degré $\deg(P)-1$ ne se neutralisent pas ;
- dans le cas où $\deg(P)=0$, c'est-à-dire si P est constant et non nul, de nombreuses copies font intervenir des polynômes de degrés $d-1$ avec $d=0$. Il s'agit ici naturellement d'un détail mineur dans cette question mais les bonnes copies se rendent compte très vite qu'on ne peut pas traiter des polynômes de degré -1.

Q4. On demande d'étudier les polynômes P vérifiant $P(X+1)=P(X)$. Beaucoup de copies contiennent sans preuve la réponse juste selon laquelle P est constant. Dans certaines bonnes copies, on évoque que P est 1-périodique donc donne lieu à une fonction polynomiale constante (des arguments supplémentaires seraient appréciables comme par exemple un passage par le caractère borné de la fonction polynomiale associée). Certaines copies ont même évoqué le théorème de Rolle pour déduire que P' s'annulerait une infinité de fois. Cependant, le théorème de Rolle ne s'applique pas pour des polynômes à valeurs complexes (il faudrait raffiner l'argumentation en considérant partie réelle et partie imaginaire).

Pour l'image de Δ_d, l'utilisation de la dimension finie et à fortiori celle du théorème du rang n'ont pas été très présentes.

Q5. La bonne réponse est parfois donnée sans argument, voire avec une référence très courte à la question précédente. Parfois, certaines copies font tendre la dimension d vers $+\infty$. certains candidats n'ont pas compris qu'il n'est pas question ici d'exprimer f en fonction de h mais de justifier l'existence de f par un argument d'algèbre linéaire. Sur le principe de la réponse, il faut se rendre compte que, étant donné que h est fixée une fois pour toutes dans $\mathbb{K}_d[X]$ pour un entier d fixé, tout se ramène à la dimension finie et on peut effectivement exploiter la question précédente.

Q6. On demande de traiter le cas particulier $h(x)=x$. La réponse est généralement correcte. La notion d'équivalence est parfois confondue avec la notion d'implication. Les copies ayant choisi de faire des implications ont parfois oublié de vérifier que les solutions trouvées conviennent.

Q7. Cette question est plutôt de l'ordre d'un exercice. Certaines copies ont oublié que $\mathbb{K}_d[X]$ est de dimension $d+1$ et non d. Parfois, il y a confusion entre polynôme minimal et polynôme caractéristique (même si dans l'exemple, les deux s'avèrent coïncider). On notera également que certaines copies ont évoqué que la nilpotence et la diagonalisabilité ne peuvent être vérifiées que par l'endomorphisme nul.

Le jury est naturellement satisfait qu'un tel résultat soit connu mais le jury attend que ce résultat soit justifié.

Q8. S'agissant de la stabilité par produit des séries entières de rayon infini, l'expression « produit de Cauchy » (avec sa définition) était attendue accompagnée d'un résultat du cours concernant soit sa convergence (pour les séries absolument convergente) soit une minoration du rayon de convergence. Rappelons ici qu'il n'y a en général pas égalité des rayons de convergence : si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont respectivement pour rayon R_a et R_b alors la série produit de Cauchy a un rayon au moins égal à $\min(R_a, R_b)$.

Q9. Il s'agit de la première question d'interversion série-intégrale. Réussie dans environ un tiers des copies. Voici quelques commentaires :

- dans une interversion série-intégrale, il est vivement conseillé d'exhiber clairement la suite de fonctions étudiées. Ici, apparait souvent l'expression $a_n e^{2i\pi(n-k)t}$. Mais si on ne précise ni l'indice ni la variable d'intégration (comme plus tard dans la question **Q14.** avec la variable supplémentaire z), alors on prend le risque d'appliquer une hypothèse à la mauvaise suite de fonctions ;
- la phrase « on considère des séries entières de rayon infini donc l'interversion est licite » mériterait d'être largement précisée ;
- on doit distinguer l'intégration de $t \mapsto e^{2i\pi nt}$ selon que $n \neq 0$ ou $n = 0$.

Q10. Nous avons déjà évoqué cela plus haut : la résolution de l'équation $e^{e^{2i\pi t}} = 1$, avec $t \in \mathbb{R}$, pose problème dans les copies. Par exemple, si $z \in \mathbb{C}$ alors il faut savoir que l'équation $e^z = 1$ équivaut à $z \in 2i\pi\mathbb{Z}$ (par confusion avec le cas réel, certaines copies ne considèrent que la solution $z = 0$). Rappelons de plus qu'il est vivement déconseillé de minorer ou majorer des nombres complexes (*a priori* non réels) ! Ce point revient souvent dans les rapports précédents ou les échanges avec les membres du jury.

Q11. Question peu technique mais qui nécessite tout de même de manipuler des séries entières. Réussie dans environ un tiers des copies.

Q12. Le jury attendait de façon explicite le résultat suivant : si $w \in \mathbb{C}$ vérifie $|w| < 1$ alors on a l'égalité (avec convergence du second membre)

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{+\infty} w^n.$$

Q14. Le cœur de la question consiste à développer $e^{z\omega(t)}$ en série et à justifier une interversion série-intégrale (on renvoie alors au commentaire de la question **Q9.**).

Q15. Dans la très grande majorité, cette question est bien traitée : on invoque la question précédente en gérant un changement d'indice. Mentionnons que certaines copies ont essayé de dériver $B_n(z) = n! \int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{(e^{\omega(t)}-1)\omega(t)^{n-1}} \mathrm{d}t$ par rapport à la variable complexe z. Cette voie n'a à notre connaissance abouti de façon rigoureuse dans aucune copie. Mais cela fonctionne très bien de façon formelle. Pour rendre rigoureux l'argument, on peut effectuer une dérivation avec $z \in \mathbb{R}$ (car la dérivation sous le signe $\int$ avec $z \in \mathbb{C}$ n'est pas du tout au programme) en se rappelant que deux polynômes sont égaux dès lors que leurs fonctions polynomiales coïncident sur $\mathbb{R}$. Mais cette seconde voie est évidemment plus technique à mettre en place.

Q16. La clé est la factorisation $e^{(z+1)\omega(t)} - e^{z\omega(t)} = e^{z\omega(t)}(e^{\omega(t)} - 1)$. Comme $B_n(z)$ a deux expressions distinctes, on peut signaler, comme pour la question précédente, qu'il n'a pas été facile aux candidats de choisir quelle formule considérer. Cela a mené certaines copies à des tentatives de bluff : partant de la seconde expression $B_n(z) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} I_{k-n}$, elles arrivaient miraculeusement au bon résultat.

Q18. Voici ce qui était attendu : d'une part vérifier que (B_n) vérifie bien les trois conditions, d'autre part pour l'unicité considérer une autre suite, que l'on peut noter par exemple (P_n) et montrer que $B_n = P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La preuve d'unicité peut être effectuée par récurrence. On rappelle, comme souvent, que le jury a donné une partie des points pour la mise en forme d'un argument de récurrence : mise en évidence d'une hypothèse de récurrence, initialisation, hérédité (même si la preuve de l'hérédité est incomplète).

Signalons quelques défauts rencontrés : la succession des égalités $B_0 = 1$ et $B_n' = nB_{n-1}$ associée au mot « unicité » a malheureusement parfois fait penser à un problème de Cauchy. Plus grave : on rappelle qu'une fonction d'intégrale nulle n'est pas forcément identiquement nulle.

Q19. On note quelques confusions entre la composition $Q(1-X)$ et le produit $Q(X) \times (1-X)$.

Q20. Dans la plupart des copies, il est bien compris qu'il ne s'agit pas d'une preuve de régularité $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ mais bien sur $\mathbb{R}$ (toute la difficulté est portée sur $\psi : x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$ au voisinage de $x = 0$). Le jury ne donne généralement pas de points pour l'évocation abstraite des « théorèmes généraux » qui donneraient directement la conclusion pour une question manifestement non triviale.

Certaines copies se sont lancées avec le théorème de la limite de la dérivée. Cela est certainement faisable pour une régularité $\mathcal{C}^1$ voire $\mathcal{C}^2$ mais devient très fastidieux avec des ordres supérieurs de dérivées.

En revanche, on rappelle qu'aucun résultat du cours n'affirme que le caractère $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction u découle du caractère $\mathcal{C}^\infty$ des fonctions partielles $x \mapsto u(x,t)$ et $t \mapsto u(t,x)$.

Une preuve raisonnable consiste à étudier la fonction $\frac{e^x-1}{x}$ au voisinage de $x = 0$ (cela peut se faire immédiatement par la théorie des séries entières ou par la formulation intégrale $\int_0^1 e^{tx}\mathrm{d}t$). On obtient ainsi une fonction qui se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule pas au voisinage de l'origine. La fonction inverse existe bien et coïncide avec la fonction ψ de l'énoncé (et donc ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$).

Q21. Le premier calcul donne $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = xu(x,t)$ (cela a été trouvé dans presque toutes les copies). La seconde formule voulue se déduit à l'aide du théorème de Schwarz (de permutation des dérivées partielles) et de la formule de dérivation de Leibniz. Cela a posé quelques problèmes. Certains candidats ont essayé une argumentation par récurrence (cela a parfois été conclu par un succès).

Q23. Il y a deux difficultés : d'abord savoir exprimer la négation d'une assertion quantifiée, ensuite il faut comprendre que si une assertion commence par $\forall c > 0$ alors on peut (au choix selon les besoins) considérer des suites (c_p) qui peuvent avoir des comportements particuliers. Ici, on peut choisir $c_p = \frac{1}{p+1}$ afin de faire converger vers 0 des termes du type $e^{z_p} - 1$ via l'inégalité $|e^{z_p} - 1| \leqslant c_p$. Cette seconde partie d'analyse a souvent posé des difficultés.

Q24. On part de la limite $e^{z_p} \to 1$. Un argument est nécessaire pour en déduire que $\mathrm{Re}(z_p) \to 0$. Dans certaines copies, on écrit malheureusement que la seule possibilité pour espérer la limite $e^{z_p} \to 1$ est d'avoir la limite $z_p \to 0$ (il s'agit comme souvent d'une confusion entre la variable réelle et la variable complexe). Le bon angle de vue est d'invoquer la formule classique $|e^z| = e^{\mathrm{Re(z)}}$.

Sur le bilan, la première limite est assez bien traitée. Mais la deuxième est globalement mal comprise. S'agissant de cette deuxième limite $|z_p| - |b_p| \to 0$, on peut essayer deux stratégies :

- utiliser l'inégalité triangulaire : $||z_p| - |b_p|| = ||a_p + ib_p| - |b_p|| \leqslant |a_b|$. Cette inégalité est importante et plus généralement la maitrise des modules et valeurs absolues peut parfois jouer un rôle décisif ;
- utiliser l'encadrement

$$0 \leqslant |z_p| - |b_p| = \sqrt{a_p^2 + b_p^2} - |b_p| = \frac{a_p^2}{\sqrt{a_p^2 + b_p^2} + |b_p|} \leqslant |a_p|.$$

Q25. Question globalement difficile et peu traitée. Mais beaucoup de candidats qui ont abordé cette question ont obtenu une réponse satisfaisante. La piste suggérée par l'énoncé est d'obtenir deux limites différentes pour $p \to +\infty$.

Signalons au passage que certaines copies, sans doute par tentative de grappillage, ont tout de même proposé des limites pour $p \to +\infty$ qui dépendent du paramètre p (ce qui n'a aucun sens).

Nous n'évoquerons pas les quatre dernières questions qui ont été très peu comprises en raison de leur technicité.

Conclusion

Le jury se permet de réitérer un passage des rapports précédents : il est attendu qu'une copie soit lisible, claire et propre. Beaucoup de copies corrigées n'ont pas respecté ces critères et ont subi l'application d'un malus. On conseille notamment de mettre en avant les hypothèses d'un résultat du cours nécessaire pour répondre à une question. Il arrive en effet fréquemment que des réponses soient partiellement valorisées sur la simple connaissance d'un théorème même si ce dernier est in fine mal appliqué.

Complétons le commentaire précédent à la lumière des prestations de cette année : dans beaucoup de copies, certains théorèmes importants n'ont pas été cités correctement (comme les théorèmes d'interversion $\sum \int = \int \sum$) ce qui a occasionné beaucoup de pertes de points car ils sont nécessaires à plusieurs reprises dans l'épreuve.

Bien que l'épreuve soit longue, la qualité de rédaction est un atout majeur pour l'obtention de bonnes notes.