1 Mathématiques

1.1 Remarques générales et conseils

Nous incitons les candidats à apprendre leur cours de mathématiques de première et de deuxième année en profondeur, de manière à maîtriser les notions et les théorèmes du programme. Nous leur conseillons également de s'entraîner intensivement au calcul, en particulier à la manipulation des inégalités.

Plusieurs erreurs relevées l'an dernier ont été commises de nouveau cette année.

Une **présentation soignée** (écriture nette, absence de ratures, résultats encadrés) dispose très favorablement le correcteur. Les correcteurs ont été étonnés par le manque de soin, beaucoup de copies ressemblent plus à un brouillon qu'à une épreuve de concours.

Les encres pâles sont encore fréquentes, et un nombre croissant de candidats a obligé les correcteurs à utiliser la loupe tant leur écriture est minuscule.

On recommande aux candidats d'employer une encre foncée, restant bien visible après numérisation. Le texte et les calculs sont souvent agrémentés de petites zones de texte coloré insérées avec des flèches par des candidats ne prenant pas la peine de rédiger une phrase pour justifier une assertion ou une expression.

Il est demandé de numéroter les copies de façon cohérente, les correcteurs n'aimant pas être confrontés à un jeu de piste.

Il est fortement conseillé d'aborder et de rédiger les questions dans l'ordre de l'énoncé.

On recommande de bien traiter une partie des questions plutôt que de produire un discours inconsistant pour chacune d'entre elles. Certaines copies obtiennent une note très faible en prétendant répondre à la quasi-totalité des questions. Nous rappelons que les questions « faciles » doivent être correctement rédigées pour être complètement prises en compte, surtout en début de problème.

La rédaction est un élément essentiel d'appréciation. Elle est en fait difficilement dissociable du fond. On attend notamment des candidats la vérification de l'existence des objets manipulés, une déclaration claire des objets utilisés, un maniement soigneux des inégalités (notamment distinction entre inégalité large et inégalité stricte). Chaque théorème utilisé doit être clairement et complètement énoncé.

La rédaction des preuves doit être courte et complète ; tous les arguments sont attendus.

Les tentatives de bluff n'apportent aucun point et préviennent très défavorablement le correcteur quant à l'ensemble de la copie.

Nous suggérons également aux candidats de se relire, de manière à éviter de laisser subsister dans leur travail des absurdités criantes (par exemple, des inégalités entre nombres complexes).

Nous soulignons également l'importance d'une lecture rigoureuse de l'énoncé, qui guide la réflexion et permet d'éviter certaines erreurs.

Les copies doivent être rédigées en Français. Les paragraphes doivent commencer à gauche de la page et non au milieu, les phrases doivent commencer par une majuscule et se terminer par un point. Quant aux connecteurs logiques $\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$, ce ne sont pas des marques d'inférence et ils ne doivent donc pas remplacer « donc », « ainsi », « c'est pourquoi », etc.

Les abréviations sont pléthore, au point de rendre la lecture parfois difficile en raison de l'ambiguïté qui peut en résulter : comment savoir que ISMQ signifie « il suffit de montrer que » ?

L'orthographe et la syntaxe sont souvent défectueuses ; des démonstrations par l'absurde se terminent par « donc impossible ».

Trop régulièrement les candidats redéfinissent sur leur copie les objets déjà définis par l'énoncé (par exemple ils écrivent « Soit $A = \dots$ » à la première question). Inversement, trop de candidats ne prennent pas la peine d'introduire leurs propres notations.

Beaucoup de symboles mathématiques sont utilisés comme abréviations, et certains candidats utilisent des abréviations surprenantes (dc, sq, dz, sars, ...) potentiellement inconnues du correcteur. Attention aux notations non définies dans le programme et potentiellement ambigües : par exemple, utiliser $\sim$ pour désigner la similitude entre matrices est porteur de confusion avec l'équivalence entre matrices, et la signification de cette notation doit donc être précisée dans la copie dès sa première utilisation.

1.2 Mathématiques 1 - filières MP et MPI

1.2.1 Généralités et présentation du sujet

Le problème portait sur une intégrale de Dirichlet généralisée :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt$$

qui était utilisée dans la dernière partie pour calculer l'espérance d'une variable aléatoire.

Le sujet comprenait quatre parties qui ne sont pas indépendantes, mais il y avait beaucoup de questions fermées, ce qui permettait d'avancer en admettant les résultats non démontrés. Une proportion significative de candidats qui a traité la dernière partie quasiment in extenso, en ayant plus ou moins sauté des questions antérieures.

La longueur et la difficulté étaient raisonnables, les points étaient répartis régulièrement dans tout le sujet. Nous avons obtenu une moyenne brute très convenable, un écart-type satisfaisant et un bon étalement des notes, qui ont permis de classer correctement les candidats. Quelques candidats ont obtenu la note maximale et il y a eu une proportion non négligeable de notes supérieures à 15.

Les correcteurs ont observé une dégradation de la présentation des copies par rapport aux années précédentes. L'interdiction des effaceurs et autres ne justifie pas les torchons.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe A.

1.2.2 Conclusion

Dans les recommandations aux futurs candidats, on peut commencer par la précision de la rédaction. Quand le sujet est, comme celui-ci, relativement abordable, il ne faut pas oublier des hypothèses en appliquant un théorème et il faut être très précis dans leur vérification.

Rappelons qu'appliquer un théorème en mathématiques ne se réduit pas à citer le nom d'un mathématicien ou d'un théorème, mais à vérifier certaines hypothèses et à en déduire des conclusions.

Ensuite, quand il y a des calculs, comme c'était le cas ici, la copie ne doit pas servir de brouillon. Les correcteurs sont conscients que l'interdiction des effaceurs et autres dispositifs crée une difficulté, mais il faut que les candidats comprennent qu'il n'y a pas de bénéfice du doute à leur profit : la consigne est très claire, si on ne peut pas lire ou s'il faut chercher les résultats au milieu de gribouillages, les points destinés à la question ne sont pas attribués au candidat.

1.3 Mathématiques 2 - filière MP et MPI

1.3.1 Présentation du sujet

Le sujet de cette épreuve de quatre heures concernait les graphes.

Les définitions de base sur les graphes (sommets, arêtes, matrice d'incidence) étaient rappelées au début du sujet. Les notions utilisées sont connues par tous les élèves de 1ère année ; elles sont d'un niveau élémentaire. Les élèves ayant suivi l'option informatique, ou les élèves de MPI, n'étaient pas avantagés. Ainsi, une comparaison minutieuse des notes obtenues aux questions théoriques concernant les graphes ne fait apparaître aucune différence entre les deux filières.

La première partie proposait une étude algébrique des matrices d'adjacence, alors que les deux suivantes, indépendantes de la 1ère, concernaient les graphes aléatoires.

Le sujet était plutôt difficile, sauf la seconde partie. Seule la première partie faisait un peu appel au programme de seconde année, avec un soupçon de réduction, mais les deux autres parties, traitant de dénombrement et de probabilités sur un univers fini, concernaient le programme de 1ère année.

La première difficulté venait du nombre important de notions introduites, et des notations correspondantes ; le sujet faisait 8 pages, et pour répondre aux questions, il fallait assez souvent feuilleter à nouveau l'énoncé pour retrouver une définition ou une notation.

La seconde difficulté venait du niveau d'abstraction demandé aux candidats afin de comprendre toutes les définitions. En effet, le concepteur du sujet a choisi de se placer dans un cadre général, où les sommets des graphes peuvent être indexés par un ensemble quelconque, ce qui obligeait à introduire systématiquement une bijection entre cet ensemble et l'ensemble $[\![1;n]\!]$, lequel ensemble pouvant également être permuté. Cette complication a fortement perturbé les candidats. La plupart d'entre eux ont d'ailleurs négligé ce point et considéré, consciemment ou non, que l'ensemble des sommets était toujours $[\![1;n]\!]$. Nous tenons à préciser que le jury n'a pas sanctionné cette interprétation. De même, certaines questions ou exemples faisaient inutilement intervenir des sommets isolés ; beaucoup de candidats les ont oubliés, et, là encore, le jury n'en a pas tenu compte.

Le jury a donc été plutôt tolérant sur les questions délicates de la 1ère partie, privilégiant la bonne compréhension du problème à la recherche d'une rigueur mathématique non indispensable. Il n'en a pas été de même pour les deux parties suivantes où, comme il s'agissait de probabilités, beaucoup de candidats se croyaient autorisés à écrire n'importe quoi ou à répondre au hasard. Cela a en général été très sévèrement sanctionné.

1.3.2 Remarques sur la présentation des copies

Propreté

Le jury a constaté cette année une amélioration assez notable de la qualité de la présentation. Les rappels incessants lors des rapports des années précédentes pourraient avoir porté leurs fruits.

Néanmoins, il subsiste un nombre significatif de copies où la présentation laisse à désirer, certaines pouvant être traitées de véritables torchons.

Cela fait partie de tous les rapports de tous les concours et est enseigné aux collégiens dès l'entrée en 6ème. Il est utile de rappeler quelques règles simples :

- Il faut utiliser un brouillon.
- Il faut utiliser une encre de couleur foncée et un stylo qui ne bave pas.
- Il faut écrire lisiblement ni trop petit ni trop gros.
- Il faut éviter les ratures.
- Il faut mettre en valeur les résultats, en les soulignant ou en les encadrant. Rappelons aussi qu'il existe pour ce faire un instrument qui s'appelle une « règle ».

Cette année, le jury de l'épreuve de Maths 2 MP a décidé d'inclure dans le barème un item spécifique concernant le soin, la présentation et la rédaction. Un malus a ainsi *systématiquement* pénalisé les copies qui ne mettaient pas en valeur les résultats, et/ou qui comportaient trop de ratures.

Rédaction

Indépendamment de la propreté, les correcteurs ont été globalement déçus par la qualité de la rédaction. Dans certaines questions, en particulier dans la 1ère partie, beaucoup de candidats se lancent dans des explications interminables en Français, souvent parsemées de « on montre facilement que », « de façon immédiate », « on a donc », mais qui ne contiennent finalement aucun argument sérieux. Dans certains cas, le correcteur a dû renoncer à essayer de comprendre ce que le candidat voulait dire. Dans d'autres questions, au contraire, on voit quelques lignes de calcul non expliquées, sans introduction, ni conclusion, ni même une seule phrase en Français. C'est particulièrement le cas dans les questions de probabilités. Que les candidats sachent que toute réponse non justifiée, même juste, a en général obtenu la note 0 : on ne donne pas de points au bénéfice du doute.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe B.

1.3.3 Conclusion

Il est important que les futurs candidats sachent que l'on attend d'eux un document structuré, agréable à lire, où l'on trouve des argumentations claires, concises et rédigées dans un Français correct. On attend aussi de la rigueur et de l'honnêteté : si un signe, ou le sens d'une inégalité, ne convient pas, par exemple, inutile de vouloir berner le correcteur en le changeant plus ou moins discrètement, le candidat ferait mieux dans ce cas là de relire ce qu'il a écrit avant. De même, si un résultat n'est pas cohérent, ou n'est pas tout à fait celui souhaité, inutile de faire comme si de rien n'était et d'écrire « donc on trouve que » suivi du résultat donné dans l'énoncé. Il vaut mieux être honnête ; certains candidats, trop rares, n'hésitent pas à mentionner que leur résultat est erroné, mais qu'ils n'ont pas trouvé l'erreur. Si la démarche était correcte, le correcteur peut alors attribuer des points.

1.4 Mathématiques 1 - filière PC

1.4.1 Présentation du sujet

Le problème a pour but d'établir que si f est une fonction strictement positive continue et à croissance lente telle que :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$$

alors :

$$\int_{\mathbb{R}} \ln(f(x))f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{f'^2(x)}{f(x)}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

Cette inégalité est en fait une inégalité de Sobolev logarithmique (Gross 1975) qui sont des inégalités de la forme :

$$Ent_\mu(f^2) \leq cE_\mu Q(f)$$

où μ est une mesure de probabilité (ici μ est la mesure canonique de Gauss), $E_\mu(g)$ représente la moyenne de g sous μ (son espérance) et $Ent_\mu(f) = E_\mu(f \ln f) - E_\mu(f)\ln(E_\mu(f))$ (dans notre cas le deuxième terme est nul) et Q une forme quadratique. Ces inégalités viennent en complément des inégalités plus classiques de Poincaré qui sont du type :

$$Var_\mu(f) \leq cE_\mu(Q(f)).$$

La première partie du problème introduit les fonctions à croissance lente et permet de montrer qu'elles sont dans $L^1(\mu)$ et forment un espace vectoriel.

La deuxième partie introduit une fonction intermédiaire dépendant d'un paramètre t dont l'étude de l'entropie en fonction de t va permettre dans la dernière partie du problème de montrer l'inégalité recherchée.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe C.

B Mathématiques 2 MP/MPI

Partie I

Q1 - Un certain nombre de candidats ne connaît pas la définition de « matrices semblables », affirmant que deux matrices qui ont même rang (ou même déterminant, ou même trace, ou même polynôme caractéristique, au choix), sont semblables, ou confondant la notion de similitude avec celle d'équivalence. Cela laisse mal augurer de la suite de la copie.

Beaucoup trop se contentent de phrases creuses comme « les coefficients (ou les lignes, ou les colonnes, au choix) de la matrice sont permutés donc on obtient une matrice semblable » ; il va de soi que les correcteurs ne sont pas dupes.

La grande majorité des candidats cherche à prouver que $M' = P^{-1}MP$, où, disent-ils, P est une matrice de permutation, objet d'ailleurs plus ou moins bien identifié puisque certains parlent de « matrice de permutation dans une base ». Rappelons que les matrices de permutation dans le cas général ne figurent pas au programme, et donc les correcteurs n'ont tenu aucun compte de résultats qui n'ont pas été redémontrés. Certains ont cependant essayé d'utiliser le programme de 1ère année (multiplication par une matrice élémentaire, ici une matrice de transposition), mais il ne fallait pas oublier que multiplier à droite ou à gauche seulement ne donne qu'une matrice équivalente et non semblable, c'était donc une méthode qui demandait beaucoup de soin dans les détails.

On peut regretter que seule une minorité de candidats a su expliquer simplement que M et M' représentaient le même endomorphisme dans des bases différentes, ce qui ne prend que quelques lignes, et qui est, à notre avis, la quintessence même de la notion de similitude puisque cela revient à trouver un représentant de chaque classe d'équivalence.

Dans la deuxième partie de la question, il s'agissait d'en déduire que deux indexations d'un même graphe conduisent à des matrices d'adjacence semblables. Comme nous l'avons déjà dit, la grande majorité des candidats a implicitement supposé que les sommets étaient indexés par l'ensemble $[\![1;n]\!]$. Mais, même en admettant cela, les permutations ont en général beaucoup perturbé les candidats. Pour ceux qui ont compris la question, la plupart ont affirmé sans démonstration que les matrices $M_{G,\mathrm{Id}}$ et $M_{G,\sigma}$ sont semblables « d'après la question précédente », phrase magique qui ne suffit pas à satisfaire le correcteur. Seule une petite minorité a fait l'effort de revenir clairement à la définition des $\left(M_{G,\sigma}\right)_{i,j}$ telle qu'elle était donnée dans l'énoncé, et cet effort a été récompensé.

Q2 - Il suffisait dans cette question d'invoquer correctement le théorème spectral (et non *spectrale*), ce que n'ont pas fait 41% des candidats, en oubliant de préciser que ce théorème s'applique à des matrices symétriques *réelles*. Beaucoup se croient obligés d'ajouter que la matrice est non nulle, les correcteurs n'ont pas bien compris pourquoi.

Q3 - Cette question, qui pouvait être traitée en quelques lignes, a donné lieu à des explications souvent obscures concernant les lignes ou les colonnes de la matrice. Il n'est pas interdit, et c'était même apprécié des correcteurs dans cette question comme dans la suivante, de faire un dessin d'une matrice pour illustrer ses propos.

Les correcteurs ont eu droit à des affirmations péremptoires : une matrice de rang 1 a toutes ses colonnes égales, une matrice de rang 1 n'est jamais diagonalisable, une matrice de rang 1 est semblable à $\mathrm{diag}(1, 0, \ldots, 0)$, ainsi que d'autres propriétés inventées et vraiment très pratiques ! Un bon nombre de candidats n'utilise pas le fait qu'il s'agit d'une matrice d'adjacence, leur « démonstration » revenant finalement à dire qu'il n'existe pas de matrice de rang 1 !

Certains candidats utilisent le fait qu'une matrice de rang 1 peut s'écrire $XY^\top$ où X et Y sont des matrices colonnes, ou affirme directement qu'une matrice de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle (ce qui est vrai) : ces résultats ne sont pas au programme, et n'ont donc pas été pris en compte.

Enfin, notons que certains candidats ont affirmé qu'une matrice d'adjacence est nulle si et seulement si le graphe est vide, oubliant ainsi le cas où tous les sommets sont isolés. Cela n'a été que très légèrement pénalisé.

Q4 - Dans cette autre question concernant le rang, les correcteurs ont là aussi du souvent lire des explications embrouillées et parfois incompréhensibles. Il n'y a aucun dessin de la matrice, mais une rédaction purement descriptive où les candidats, qui n'ont pas du faire de brouillon, écrivent tout ce qui leur passe par la tête en citant des numéros de lignes ou de colonnes, avec des indices changeants, on n'y comprend rien, le tout entrecoupé de « forcément », « d'après ce qui précède », « donc »... Au bout d'un certain nombre de phrases, le correcteur a la tête qui tourne ! Voici par exemple un court extrait (tel quel) d'une copie (la réponse comportait une page de texte du même genre) :

> *Puisque G est une étoile, on aura 1 que si $i = c$ et j n'est pas un sommet isolé ou $j = c$ et i n'est pas un sommet isolé on aura alors que des 1 sur la i-ème ligne et c-ième colonne donc hormis sur la c-ième ligne tous les coefficients non nuls sont sur la c-ième colonne donc les lignes sont colinéaires entre elles, on a donc (etc.)*

Certains candidats, respectant en cela le formalisme de l'énoncé, ont considéré une indexation quelconque, ce qui conduit à des phrases encore plus compliquées à comprendre ! Le jury a tout à fait admis que le candidat considère que les sommets de l'étoile étaient ceux numérotés de 1 à $d+1$, même s'il ne le précisait pas explicitement. De même, le fait de ne pas considérer les sommets isolés n'a pas été pénalisé dans cette question.

Q5 - Beaucoup de candidats, ici comme dans la question **1**, parlent de *la* matrice d'adjacence d'un graphe. Cela n'a évidemment aucun sens puisque, comme cela est bien expliqué dans l'énoncé, la matrice d'adjacence dépend de l'indexation choisie. Toutes les réponses qui commençaient par cette erreur étaient donc forcément fausses.

Il fallait ici, comme cela a déjà été dit, revenir rigoureusement à la définition de $M_{G,\sigma}$, et expliquer proprement pourquoi les matrices étaient semblables, en détaillant les permutations utilisées et en mentionnant la question **1**. Cela a été très rarement le cas.

On pouvait évidemment simplifier la question en supposant au départ $S' = [\![1;n]\!]$ (et en le disant clairement) ; dans ce cas, on avait $M_{G',\mathrm{Id}} = M_{G,\sigma}$, mais il fallait bien sûr démontrer et non affirmer cette égalité (certains candidats disant d'emblée que ces matrices sont seulement semblables, ce qui montre que la notion de matrice d'adjacence n'a pas été bien comprise). Comme nous l'avons dit, le jury n'a pas pénalisé les candidats qui ont ainsi simplifié la question, lorsque la réponse était suffisamment étayée.

Certains candidats se sont contentés de redémontrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, ce qui fait partie du programme et était rappelé dans l'énoncé, donc bien sûr cela n'était pas pris en compte dans le barème.

Enfin, signalons que des justifications comme « G et G' sont le même graphe avec une indexation différente, donc les matrices sont semblables », parfois entourées d'autres phrases tout aussi creuses, témoignent d'un grand manque de rigueur et indisposent le correcteur.

Q6 - Les correcteurs ont été très surpris de constater que beaucoup de candidats ne savaient pas faire le lien entre le coefficient de X^{n-1} dans le polynôme caractéristique et la trace de la matrice. Et que parmi les autres, plus de la moitié se trompait de signe.

Le calcul du coefficient de a_{n-2} a été fait correctement dans les meilleures copies, et l'on a pu voir avec plaisir les 3 méthodes possibles : utilisation de l'expression du déterminant, utilisation de la multilinéarité et utilisation des relations coefficients-racines. Cependant, la grande majorité des candidats a répondu au hasard à cette question, beaucoup devinant la bonne valeur à partir de l'étude de quelques exemples. On apprécie d'ailleurs beaucoup l'honnêteté de certaines copies où il est dit « je ne sais pas démontrer ce résultat, je l'ai obtenu à l'aide d'exemples » par rapport à d'autres où il est affirmé « on trouve facilement que ... » Cela est récompensé au niveau de la notation.

Q7 - Il était facile de déduire le polynôme caractéristique de la question précédente et de la question **4**, à condition de bien justifier le lien entre le rang et l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0. Ceux qui ont bien fait ce lien ont été récompensés, même si les calculs de la question précédente étaient inachevés ou faux.

Il était également possible de calculer directement le polynôme caractéristique en écrivant la matrice d'adjacence après avoir choisi une bonne indexation ; le calcul du déterminant se faisait assez facilement à l'aide de développement selon des rangées. Malheureusement, la plupart des candidats qui ont utilisé cette méthode l'ont fait de façon bâclée, avec des dessins de matrices peu explicites ou raturés partout, et des calculs non expliqués. Encore une fois, ce n'est pas au correcteur d'essayer de comprendre (ou plutôt, *deviner*, dans la plupart des cas) ce qu'a voulu faire le candidat à partir de calculs mystérieux ; si ce n'est pas possible, il passe à la question suivante, tout simplement.

Certains candidats dans cette question n'ont pas bien lu l'énoncé : s'il s'agissait d'une étoile à d branches, le nombre total de sommets était n et non $d+1$, à cause des sommets isolés. Ceux qui ont considéré $n = d+1$ n'ont pas été pénalisés.

Le calcul des valeurs propres a en général été bien fait par ceux ayant trouvé le polynôme caractéristique, mais on a vu quand même des erreurs de calcul assez incroyables pour une équation aussi simple. Il y a eu aussi des copies où, le calcul précédent étant faux, le candidat trouve des valeurs propres imaginaires pures, sans que cela ne choque.

Pour le calcul des vecteurs propres, il valait mieux avoir choisi une indexation adaptée pour le graphe, et, bien sûr, représenter la matrice correspondante. Certains candidats ne le font pas, et donnent des réponses avec des vecteurs colonnes dont on ne sait pas à quoi correspondent les coordonnées, cela ne veut plus rien dire. Beaucoup donnent un résultat sans justification. Enfin, une petite minorité de candidats (15% de ceux ayant abordé la question) donne une réponse correcte, la plupart après avoir résolu des systèmes, mais certains plus astucieusement en utilisant la dimension des sous-espaces propres.

Q8 - Cette question n'a été réussie que par un nombre minime de copies (1,5%). Dans beaucoup de cas, le candidat a l'idée de ce qu'il faut faire, après avoir écrit la matrice par blocs et choisi une indexation convenable. Beaucoup ont voulu développer selon une rangée, ce qui menait à des calculs pénibles ; il valait mieux utiliser la multilinéarité du déterminant fonction de ses colonnes. Ce calcul demandait de la rigueur et du soin, ce qui a été rarement le cas, avec bien trop d'affirmations malhonnêtes pour *in fine* recopier la formule de l'énoncé.

Cependant, les candidats qui ont ébauché le début d'une démonstration propre et correcte ont été récompensés, même s'ils n'ont pas réussi à terminer.

Q9 - Cette question était impossible à traiter si le calcul de la question **7** n'avait pas été fait. Un certain nombre de candidats, ayant lu trop rapidement l'énoncé, n'ont pas fait attention que, si dans la question **7** le graphe pouvait contenir des sommets isolés, ce n'était plus le cas ici. Certains ont donc considéré que chaque étoile contenait n sommets, et même d'autres que la 1ère étoile contenait n_1 sommets et la seconde n_2. Si le raisonnement et les calculs étaient corrects, ces candidats n'ont pas été pénalisés.

De même, si le résultat trouvé à la question **7** comportait un coefficient incorrect, il n'en a pas été tenu compte ici.

Compte tenu de la question **8**, la seule difficulté pour les candidats ayant répondu à la question **7** était de déterminer le polynôme caractéristique $\chi_{G\setminus s}$. Et le jury a été désagréablement surpris de constater que, pour une grande partie des candidats, le polynôme caractéristique d'une matrice nulle est égal à 0, voire à 1 ; on n'a pas bien compris pourquoi, puisqu'en général aucune explication n'est fournie.

Rappelons encore une fois que les candidats qui ont fait un calcul même juste où ne figure aucune justification ont été pénalisés.

Dans la deuxième partie de la question, beaucoup de candidats se sont contentés d'écrire : « le rang de la matrice d'adjacence d'une double étoile est 2 3 4 5 6 » (rayer la mention inutile). Au risque de nous répéter, ce genre de réponse ne mérite aucun point.

La démarche suggérée par l'énoncé était de déduire le rang à partir du polynôme caractéristique trouvé auparavant ; encore fallait-il expliquer correctement le lien entre les deux, en mentionnant l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0, la diagonalisabilité et le théorème du rang, les trois étant indispensables sous peine d'être pénalisé.

Certains candidats, qui n'avaient pas résolu la question précédente, ont trouvé le rang en écrivant la matrice d'adjacence de la double étoile après avoir choisi une bonne indexation ; c'était une bonne idée, à condition que l'explication soit claire et concise, et de préférence illustrée par un dessin.

Le jury a cependant été indulgent, et donné des points dans le cas de réponses incomplètes, mais qui démontraient la bonne compréhension du problème par le candidat.

Q10 - Cette question marquait le début de la partie du problème consacré aux probabilités. Comme souvent dans ce domaine, beaucoup de candidats pensent qu'il suffit de « balancer » une formule plus ou moins compliquée pour répondre aux questions.

Le barème pour toutes ces questions de probabilités privilégiait les réponses argumentées dans les détails, et était impitoyable avec les réponses faites au hasard, ou, pire, directement recopiées dans l'énoncé en les faisant précéder de quelques phrases incompréhensibles pour faire croire qu'on avait réfléchi.

La première partie de cette question semblait assez facile, puisque l'évènement $\{G\}$ était parfaitement décrit dans l'énoncé comme intersection d'évènements plus élémentaires, et il était même indiqué que ces évènements sont indépendants !

Cependant, seulement une minorité de candidats (26%) a répondu correctement.

Dans un nombre très significatif de copies, le jury a constaté que les candidats confondaient multiplication et addition, écrivant par exemple $\mathbb{P}(\{G\}) = ap_n + (N-a)q_n$ ou $ap_n(N-a)q_n$ au lieu de $p_n^a q_n^{N-a}$, même après avoir écrit auparavant que $\mathbb{P}(\{G\})$ vaut un produit de probabilités.

Trop de candidats ne lisent pas l'énoncé avec soin : il était indiqué que le résultat devait dépendre de N, or certains donnent une formule où N n'intervient pas.

Pour en finir avec cette question, et pour montrer que le jury dans toute cette partie de probabilités a été particulièrement soucieux de la rigueur des réponses, nous pouvons donner cet extrait du barème : les candidats qui ne mentionnaient pas les variables aléatoires $X_{i,j}$ et leur indépendance, ou bien ceux qui ne justifiaient pas que N correspond au nombre d'arêtes, voyaient leur nombre de points divisé par deux (les deux sanctions se cumulant).

Pour la deuxième partie de la question, là encore, beaucoup trop de réponses fantaisistes. On ne compte pas le nombre de copies où la probabilité $\mathbb{P}(\{G\})$ était fausse et où le candidat arrive par miracle à en déduire $\mathbb{P}(\Omega_n) = 1$, ou bien celles où un coefficient binomial a été rajouté à la hâte par dessus un calcul existant afin de pouvoir conclure. Le tout sans explications bien sûr, afin de laisser au correcteur tout le plaisir de déchiffrer et d'interpréter ce que le candidat a bien pu vouloir dire.

Partie II

Q11 - Cette question facile a été abordée par un grand nombre de candidats, mais souvent bâclée. Ce n'est pas parce qu'une question est facile qu'il faut se contenter d'écrire à la va-vite 2 lignes de calcul sans aucune explication en Français.

Quelle que soit la méthode utilisée (il y en avait 3 possibles), il était indispensable d'indiquer que la variable aléatoire X est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si on voulait utiliser l'inégalité de Markov, il fallait la rappeler clairement et en citer les hypothèses. Une réponse comme : « on a $\mathbb{P}(X > 0) \leqslant \mathbb{E}(X)$ d'après Markov (sic !) » n'a évidemment aucune valeur.

Le nom de cette inégalité devait bien sûr être cité, et correctement orthographié ; certains ont confondu avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, et on a vu plusieurs fois mentionné « les lois de Kirchoff » !

Des points spécifiques étaient prévus au barème pour tous ces « détails ».

Certains candidats ont voulu utiliser le résultat : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)$, valable pour X à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$; c'était une bonne idée, mais il ne fallait pas faire commencer la somme à $n = 0$! Et, puisque cette relation figure dans le programme officiel, il était inutile de la redémontrer !

Q12 - Là encore il s'agissait d'une question très facile, compte tenu de l'indication donnée par l'énoncé, et on retrouve les mêmes défauts que ceux mentionnés pour la question précédente. Le jury a là aussi été très sévère pour toute justification fantaisiste ou manquante.

Signalons, et cela est valable à d'autres endroits du problème, que des pseudo-justifications comme : « d'après un théorème de probas », « d'après une inégalité du cours », « d'après le cours » ne font que montrer au correcteur la méconnaissance dudit cours.

Signalons enfin que les noms de Jules Bienaymé et de Pafnouti Tchebychev ont donné lieu à des variations orthographiques nombreuses et parfois savoureuses.

Q13 - Cette question assez facile a donné lieu à nombre de réponses ahurissantes.

Certains candidats affirment, sans preuve évidemment, que la variable aléatoire A_n suit une loi uniforme, de Bernoulli, ou géométrique (nous avons tout vu). Sans préciser le paramètre bien sûr. D'autres donnent des formules avec des puissances, des produits, des quotients, de nombres dont on se demande s'ils n'ont pas été piochés au hasard. Un tel manque de rigueur et d'honnêteté intellectuelle ne peut qu'irriter au plus haut point le correcteur, et le faire douter de tout ce qui pourra être affirmé par la suite.

Il en est de même pour ceux qui affirment que A_n suit une loi binomiale, sans préciser les paramètres et sans aucune explication.

Une petite majorité de candidats reconnaît quand même une loi binomiale de paramètres (x, p_n), où x prend des valeurs variables et bien sûr inexpliquées : n, n^2, 2^n, $n!$, N....

La bonne réponse n'est fournie que par moins de la moitié des candidats ; et parmi ceux qui daignent fournir une explication, la plupart se contente d'une phrase comme : « A_n est la somme de N variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernouilli de paramètre p_n », le mot « indépendantes » étant d'ailleurs souvent oublié. Très peu précisent que N désigne le nombre d'arêtes maximal d'un graphe à n sommets, très peu introduisent les variables aléatoires $X_{i,j}$ pourtant gentiment explicitées dans l'énoncé.

Finalement, assez peu de candidats (environ 27%) ont obtenu la note maximale à cette question

Q14 - Il était évidemment impossible de traiter cette question et la suivante si la loi de A_n n'avait pas été correctement trouvée à la question précédente. Cependant, nous avons vu nombre de candidats aboutir à la conclusion indiquée dans l'énoncé à partir d'une loi fausse, et après des « calculs » dont le manque de sérieux ne peut qu'indisposer le correcteur.

Le jury a cependant été généreux avec ceux des candidats qui, partant d'un paramètre incorrect dans la loi binomiale de A_n, ont eu la bonne démarche pour la démonstration, connaissaient les formules du cours concernant l'espérance et la variance, et ne trichaient pas dans les calculs.

À ce propos, nous rappelons que les formules donnant espérance et variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale sont au programme, et qu'il est inutile de les redémontrer ! C'est une grosse perte de temps, qui fait en outre soupçonner la non-connaissance du cours. Nous avons d'ailleurs été surpris par le nombre important de candidats qui citaient une formule erronée. Rappelons, même si c'est une évidence, qu'une bonne connaissance du cours est indispensable.

Q15 - Sans être difficile, cette question était légèrement plus délicate que la précédente. En effet, ceux qui utilisaient la majoration de la question **12**, à condition de connaître la variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale bien sûr, obtenaient une majoration où intervenaient p_n et q_n, qu'il convenait de majorer puisqu'ici, contrairement à la question précédente, on n'en connaissait pas les limites. De même, les candidats qui utilisaient le calcul $\mathbb{P}(A_n > 0) = 1 - q_n^N$ étaient confrontés à un problème, que beaucoup n'ont d'ailleurs pas vu, car il était ici impossible d'utiliser l'équivalent $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$. Toutes ces erreurs dans les calculs de limite sont habituelles pour les élèves de 1ère année mais inadmissibles pour un élève de 2ème année.

De la même façon, pour cette question comme pour la précédente (et d'autres qui suivent), il n'est peut-être pas inutile de rappeler que le théorème d'encadrement (ou des gendarmes) permet de prouver *l'existence* d'une limite, *puis* de la calculer, et qu'il est faux de passer à la limite dans une inégalité si l'existence de ces limites n'a pas été prouvée auparavant. Cette remarque est un grand classique du cours de 1ère année !

Q16 - Cette question ne servait qu'à conclure l'étude précédente, donc à vérifier si le candidat avait compris l'objet du problème. On attendait donc une explication concise et claire *en Français*.

Or nous avons lu des réponses comme celle-ci (intégralement tirée d'une copie) :

$$\textbf{16)}\ \ \mathcal{P}_n : \ A_n > 0 \quad \text{et f° de seuil} \ : \ \frac{1}{n^2} \cdot$$

Ce genre de réponse n'est évidemment pas pris en compte par le correcteur. Il fallait bien sûr dire ce que signifie la propriété $A_n > 0$, et mentionner la référence aux questions qui permettaient de conclure quant à la fonction de seuil.

Beaucoup de candidats ont d'ailleurs affirmé que la propriété étudiée était la *probabilité* $\mathbb{P}(A_n > 0)$, ce qui prouve que la notion introduite par le problème n'a pas été comprise.

Enfin, cette question a été l'occasion (comme la question **26**) de nombreuses tentatives de grappillage de points : certains qui n'avaient répondu correctement à aucune des questions précédentes, mais ayant bien lu l'énoncé, tentant de fournir une réponse. Cela n'a pas été pénalisé, mais les candidats doivent savoir que le jury est parfaitement conscient de cela, et que le barème de la question est ajusté en conséquence.

Partie III

Q17 - Pour cette question, comme pour beaucoup de celles qui suivent, la réponse était donnée dans l'énoncé. Cela a été l'occasion pour certains de laisser libre cours à leur imagination pour faire de longues phrases inutiles et creuses, qui se terminent invariablement par : « donc on a : ». D'autres mentionnent la *réunion* des $X_{i,j}$ au lieu de l'intersection, mais finissent quand même par écrire un produit.

Il suffisait pourtant de décrire l'évènement $(H \subset G)$ à l'aide des évènements indépendants $X_{i,j}$, comme dans les questions **10** et **13**. Faire intervenir des évènements élémentaires pour former un autre évènement à l'aide d'opérations ensemblistes est pourtant une technique de base dans les calculs de probabilités, qui devrait être acquise chez un élève de 2ème année qui présente le CCMP.

Bien sûr, et cela est valable pour plusieurs des questions suivantes, se borner à recopier l'énoncé après avoir forcé le correcteur à lire une prose indigeste ou à déchiffrer des calculs manifestement faux, ne l'incite guère à l'indulgence, bien au contraire !

Q18 - Les deux parties de cette question étaient des problèmes de dénombrement. La plupart des candidats les ont ignorées (plus de 70%) ; une grande partie a donné des résultats et explications complètement fantaisistes (en arrivant quand même, bien sûr, au résultat final qui figurait dans l'énoncé) ; seulement 7% des candidats ont donné des réponses correctes.

Q19 - La première partie de cette question demandait juste de bien avoir compris l'énoncé et ses notations. Les correcteurs ont été très surpris de voir écrit, dans un nombre très important de copies : $X_n^0 = \sum\limits_{H \in \mathcal{C}_0} X_H(G)$, ou encore $X_n^0 = \bigcup\limits_{H \in \mathcal{C}_0} X_H$, ce qui n'a aucun sens.

La seconde partie de la question a donné lieu à nombre de tentatives d'escroquerie : dans la plupart des cas, le candidat obtient $\mathbb{E}(X_n^0) = \sum\limits_{H \in \mathcal{C}_0} p_n^{a_H}$, ce qui n'est pas très compliqué puisqu'il suffit de réunir deux résultats indiqués dans l'énoncé.

Ensuite, avant même de réfléchir, le candidat se dit : « Mais qu'est-ce que je vais bien pouvoir faire pour obtenir le résultat de l'énoncé ? Une petite majoration, peut-être... ». Et donc, le candidat écrit : « Or on a : $a_H \leqslant a_0$ » (sans explication bien sûr) « donc on a $p_n^{a_H} \leqslant p_n^{a_0}$ d'où (etc.) ». Sauf que $p_n < 1$, donc la dernière majoration est incorrecte... Quelques candidats l'ont remarqué ; qu'à cela ne tienne ! une petite rature et $a_H \leqslant a_0$ devient $a_H \geqslant a_0$.

C'était juste un exemple de ce qu'ont pu endurer les correcteurs à la lecture de certaines copies... Et surtout pour donner un conseil aux futurs candidats : quand vous abordez une question, n'ayez pas constamment les yeux fixés sur le résultat à obtenir, en voulant y parvenir par toutes les contorsions de raisonnement possibles, mais demandez-vous plutôt : « est-ce que ce que j'ai écrit a un sens ? Est-ce véritablement prouvé ? Ça découle de quelle question ou de quel résultat du cours ? », et alors, indiquez votre démarche sur la copie.

Q20 - Cette question était certainement l'une des plus difficiles du problème, et n'a été correctement résolue que dans 2% de copies.

Il fallait en effet, dans la continuité de l'indication donnée par l'énoncé, introduire une nouvelle variable aléatoire Y_n^0 associée à H_0 de la même façon que X_n^0 est associée à H, puis remarquer que $X_n^0 \leqslant Y_n^0$.

La plupart des candidats ont tenté de démontrer directement le résultat en majorant $\mathbb{P}(X_n^0 > 0)$ à l'aide de la question **11** (ce qui est correct), mais en écrivant $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{s_0 - a_0\omega_0} = 0$ alors que $s_0 - a_0\omega_0$ est positif.

Quelques rares candidats ont remarqué qu'il y avait un problème, et ont avoué qu'ils ne pouvaient pas conclure ainsi : même si la question ne rapportera pas de point, une telle attitude rend le correcteur plus indulgent pour la suite.

Q21 - Un certain nombre de candidats ont réussi à faire apparaitre la quantité $\mathbb{E}(X_H X_{H'})$, mais les justifications pour obtenir la formule de l'énoncé $\mathbb{P}(H \cup H' \subset G)$, quand il y en a eu, ont pour le moins été laborieuses ; mais tous y arrivent, bien sûr. De même tous arrivent à faire apparaître l'exposant $2a_0 - a_{H \cap H'}$, même sans avoir remarqué, ce qui était indispensable, que $a_H = a_{H'} = a_0$. Seulement 40% des candidats ayant abordé cette question obtiennent tous les points.

Q22 - La démarche pour traiter cette question était similaire à celle de la question précédente, et les candidats ayant bien traité cette question précédente ont en général réussi celle-ci.

Notons une erreur très fréquente, à savoir la confusion entre $\mathbb{E}\big((X_n^0)^2\big)$ et $\big(\mathbb{E}(X_n^0)\big)^2$. Cela simplifiait considérablement la démonstration !

Q23 - Toutes les remarques faites précédemment s'appliquent à cette question, malheureusement encore plus souvent. La formule à obtenir était passablement compliquée, et bien peu l'ont justifiée de façon rigoureuse et claire, en particulier en ce qui concerne la partie dénombrement. Calculs sales, parfois illisibles, non expliqués, phrases incompréhensibles, affirmations gratuites et souvent fausses.

Q24 - Le début de cette question consistait à démontrer une inégalité assez grossière, et plutôt facile à obtenir. Il y avait d'ailleurs plusieurs façons d'y parvenir. Malheureusement, très peu de candidats expliquent en Français leur démarche, et c'est au correcteur, de réfléchir à ce qu'a voulu faire le candidat.

Notons comme d'habitude beaucoup trop de tentatives d'abuser le correcteur, avec par exemple des inégalités qui changent de sens subrepticement, ou des implications manifestement fausses, comme $r \geqslant q \Rightarrow r^{-q} \geqslant q^{-q}$. Notons aussi que beaucoup de candidats écrivent des équivalences entre leurs inégalités, ce qui était évidemment impossible ici.

Quant à la fin de la question, où il fallait utiliser l'inégalité précédente pour un calcul de limite, elle n'a été bien traitée que dans 2‰ des copies. Notons d'ailleurs que l'on pouvait aussi trouver cette limite en utilisant la formule de Stirling.

Q25 - Q26 - Q27 - Ces trois dernières questions, à part dans les copies des rares candidats ayant fait tout le problème sérieusement, ont surtout été l'objet de tentatives de grappillages de points. Tentatives souvent malhonnêtes et bâclées qui n'ont pas impressionné le correcteur.

RETOUR