Mathématiques 1

Présentation du sujet

Cette épreuve propose d'adapter la méthode de Héron d'Alexandrie à la détermination d'une racine carrée matricielle, dans le cas des matrices symétriques positives, puis des matrices trigonalisables à spectre strictement positif.

La partie I est consacrée à l'étude de deux approximations de $\sqrt{2}$, l'une par le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$, l'autre par la méthode d'Héron d'Alexandrie, qui est alors introduite de manière générale pour être utilisée dans la suite du sujet.

La partie II propose une adaptation de la méthode d'Héron d'Alexandrie à la détermination d'une racine carrée pour une matrice symétrique positive.

La partie III est consacrée à l'étude des performances numériques de la méthode de Newton-Raphson, dont la méthode d'Héron est un cas particulier (celui de la fonction $x \mapsto x^2 - a$).

Enfin, la partie IV propose l'étude partielle d'un algorithme menant à la décomposition de Dunford d'une matrice trigonalisable. Cet algorithme, analogue à celui de Newton-Raphson, est ensuite utilisé pour déterminer une racine carrée d'une matrice trigonalisable à spectre strictement positif.

Analyse globale des résultats

Comme nous le verrons plus loin, la sélection des meilleurs candidats s'est essentiellement faite sur deux points : la connaissance (parfois basique) du cours et la qualité du raisonnement, bien plus que sur le volume traité ou l'originalité des idées.

Concernant le premier point, à titre d'exemple, la question **Q13.** (dont la réussite consiste en la restitution sans démonstration des isométries de $\mathbb{R}^2$), traitée par la quasi-totalité des candidats, n'a été réussie que par une part minoritaire d'entre eux (47 %). La question **Q2.**, demandant de reconnaitre sans démonstration le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ (connaissance demandée explicitement par le programme), aura été un échec pour plus d'un quart des candidats.

Quant au second point, le jury rappelle que la gestion des implications et équivalences dans les raisonnements doit se faire avec la plus grande rigueur. À titre d'exemple, particulièrement significatif, la question **Q15.** demande l'énoncé d'une condition nécessaire et suffisante : une réponse qui repose sur « pour que M soit positive, il faut que etc. » ou bien « M est positive si son spectre etc. » ne peut être considérée comme répondant pleinement aux exigences. Près de la moitié des candidats se seront laissés aller à ces approximations.

Cette année encore, le soin apporté à la qualité des réponses est un facteur plus décisif dans les résultats finaux que la quantité de questions traitées.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Ce sujet se caractérise par la grande variété des questions en termes de niveau de difficulté et de notions abordées.

Le jury a relevé un certain nombre de points généraux dans la correction des copies, et en tire les recommandations suivantes.

- Le jury note **des faiblesses importantes et largement répandues sur des points de cours élémentaires.** Les questions **Q2.**, **Q13.** et **Q15.** consistent explicitement en un rappel – sans démonstration – de points de cours de base.
  En question **Q23.**, l'inégalité de Taylor-Lagrange est rappelée avec succès par moins d'un tiers des candidats traitant la question.

- **Un enchainement de calculs ou de symboles logiques ne peut constituer une réponse à part entière.** Le jury relève une proportion importante de copies présentant presque systématiquement les réponses de cette manière, avec un maniement souvent bancal des symboles logiques élémentaires (implications, équivalences en particulier), utilisés, à tort, comme des abréviations. Le jury encourage les futurs candidats à faire un plus grand effort de rédaction, à subordonner leurs calculs et enchainements logiques à un texte construit.

- **Les variables utilisées par les candidats sont loin d'être systématiquement déclarées.** Il n'est pas rare de voir apparaitre des indices, des vecteurs colonnes ou des matrices, au milieu d'un raisonnement, sans en avoir constaté la moindre déclaration préalable, laissant au lecteur le soin de comprendre dans quel ensemble ces variables se trouvent, ou ce qu'elles désignent. Dès les premières questions, on voit abonder, dans les copies, pléthore d'indices i, n et de variables x dont le statut n'est pas précisé et dont la place dans le raisonnement est laissée à la libre appréciation du lecteur. Ce genre d'oubli n'est pas souhaitable.

Le jury rappelle également que les **fautes d'orthographe et de français**, malheureusement nombreuses dans cette épreuve, nuisent à la qualité et à la clarté du discours et laissent au lecteur une impression négative qui peut se répercuter, consciemment ou non, sur la note finale (en plus de faire l'objet d'un malus). En particulier, les fautes d'accord, très nombreuses et quasi-systématiques dans bon nombre de copies (citons le malheureusement très fréquent « théorème spectrale »), interrogent quant à l'idée que certains candidats se font de la structure d'une phrase.

D'une manière générale, le jury note de manière importante **un manque de rigueur dans l'appréciation des liens logiques**. Par exemple, de très nombreuses réponses à la question **Q15.** se contentent, sans doute par manque de rigueur ou d'attention, d'énoncer une condition nécessaire ou une condition suffisante de positivité de la matrice M.

Le jury note enfin une recrudescence de divers sigles et abréviations pour signifier certaines notions ou certains résultats (« CSSA », « APCR », « CVU », « CVN », « TVI », « STG », « SATP ») dont l'usage n'a rien d'universel. Dans certaines copies, une trop forte concentration de tels sigles dessert notablement la clarté du discours.

Voici désormais les remarques du jury, question par question.

Q1. De trop nombreuses réponses proposent d'appliquer le critère de d'Alembert pour les séries entières sans s'assurer que $a_n \neq 0$ au moins à partir d'un certain rang.

La notation $\begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix}$ n'est pas au programme lorsque α n'est pas un entier naturel : les candidats qui veulent l'utiliser doivent la définir.

Q2. Reconnaitre ici, sans démonstration, le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est un point qui échappe à plus d'un quart des candidats.

Q3. Le calcul à mener, sachant que le point d'aboutissement en est donné, est dans l'ensemble plutôt bien compris et pratiqué par les candidats.

Q4. La décroissance du terme général $|b_n|$ pour le critère spécial des séries alternées est souvent citée mais non démontrée, alors que ce point n'a rien d'évident.

Malgré un équivalent trouvé en $O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$, une majorité de candidats préfère recourir au critère spécial des séries alternées alors que la série est absolument convergente.

Q5. De trop nombreuses réponses se contentent d'évaluer l'égalité $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n x^n$ en $x = 1$ sans comprendre que cela résulte d'un argument de continuité en 1.

Contrairement à ce qui a été souvent lu, la décroissance d'un équivalent d'une suite n'implique pas la décroissance de cette suite.

Q6. Le jury note beaucoup de raisonnements combinant des $O(\cdot)$ de manière profondément erronée.

Q7. Certains raisonnements par récurrence sont mal rédigés : on n'introduit pas la phase d'hérédité par « on suppose que la propriété est vraie pour tout n etc. ». Il faut aussi remarquer que $\dfrac{a}{c_n(a)}$ n'est que positif (et non strictement positif), étant donné que a est pris dans $\mathbb{R}_+$.

De même, la phrase d'initialisation attendue est pour $n = 0$ et non pour $n = 1$.

Enfin, l'évocation simple d'une « récurrence immédiate » ne peut constituer une réponse satisfaisante.

Q8. La positivité de $c_{n+1}(a)$ est ce qui permet de passer de $c_{n+1}^2(a) \geqslant a$ à $c_{n+1}(a) \geqslant \sqrt{a}$. Trop peu de copies le mentionnent (un quart).

Q9. La suite $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est décroissante qu'à partir du rang 1. Par ailleurs, le jury note plusieurs approximations de raisonnement dans la détermination de la valeur de la limite pour cette même suite.

Une suite minorée par $\sqrt{a}$ ne converge pas nécessairement vers $\sqrt{a}$: cet argument est donc tout à fait insuffisant pour conclure.

Enfin, on rappelle qu'il ne faut pas confondre le réel $c_n(a)$ (qui ne peut, par exemple, être qualifié de « croissant ») et la suite $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$.

Q10. Beaucoup de candidats commettent de grosses erreurs sur le calcul avec des puissances, par exemple « $\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^{n-1}} = \left(\dfrac{1}{32}\right)^{2n-1}$ ».

Q11. La croissance comparée, si elle est généralement correcte, est très rarement justifiée (et encore plus rarement de manière satisfaisante). Il ne s'agit pourtant pas d'une croissance comparée usuelle, une justification était attendue.

Q12. Une question assez peu traitée, avec un code Python qui nécessite une justification mathématique s'appuyant sur la question **Q10.**. Le jury rappelle que tout code doit être convenablement présenté, en particulier sur le plan de l'indentation (déterminante en langage Python).

Certaines copies proposent des algorithmes à la complexité démesurée par rapport aux enjeux. Même si la question ne le précise pas spécifiquement, la complexité est un enjeu en programmation, auquel les candidats sont par ailleurs fortement sensibilisés par le cours d'informatique de tronc commun. Le jury attend que les candidats soient bien conscients de cet enjeu dans leurs productions informatiques.

Q13. Cette question de simple restitution du cours (sans démonstration) est mal réussie. La plupart des erreurs proviennent de ce que les candidats se contentent de citer les matrices de rotation, oubliant les symétries (sans, par ailleurs, préciser le statut du paramètre θ introduit).

Q14. Si, certes, il existe une infinité de réels θ tels que $\theta \equiv 0[\pi]$, ceux-ci ne donnent pas naissance à une infinité de matrices $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. L'ensemble $\{\cos(n\pi) : n \in \mathbb{Z}\}$ n'est pas infini.

Q15. Outre une mauvaise lecture de la question (il s'agit ici d'exprimer clairement une condition nécessaire et suffisante), on note de très nombreuses confusions entre inclusion et appartenance. Le spectre d'une matrice réelle peut éventuellement être inclus dans $\mathbb{R}_+$, mais ne peut certainement pas lui *appartenir*.

Q16. De nombreuses réponses proposent une racine carrée basée sur une diagonalisation de la matrice M, sans préciser que cette diagonalisation a lieu avec une matrice de passage orthogonale. Or ce point est essentiel pour conclure au caractère symétrique de la racine carrée matricielle proposée.

Le jury rappelle qu'une notation (ici $\sqrt{M}$) ne peut être utilisée avant d'avoir été proprement introduite (ici, deux questions plus loin).

Q17. Une question difficile, peu traitée et réussie par moins de 3 % des copies. On rappelle que l'égalité $B^2 = C^2$ dans $M_n(\mathbb{C})$ n'implique pas $B = C$ ou $B = -C$.

Deux matrices diagonalisables ne le sont pas nécessairement avec la même matrice de passage. Une part importante de la question se situe à ce niveau.

Q18. La bonne inversibilité de la matrice M_n dans la phase d'hérédité fait l'objet de peu d'attention de la part des candidats.

Q19. Un argument d'unicité de la racine carrée matricielle positive est nécessaire pour conclure, ce point est peu présent dans les copies.

Q20. Cette question nécessite une juste articulation des théorèmes d'analyse de première année, une articulation peu souvent présente dans les copies (moins de 15 %). La continuité de f' est ce qui fait que f' reste de signe constant (strict) sur I, ce qui implique la stricte monotonie de f, donc son injectivité, et donne par conséquent la présence d'au plus un point d'annulation pour f.

La continuité de la fonction f', par exemple, est l'argument qui manque le plus souvent.

Q21. Le jury note quelques passages hasardeux à la borne inférieure : ce n'est pas parce que $f'(a) > 0$ pour tout $a \in I$ que $\inf_{a\in I} f'(a)$ est strictement positif. Le « théorème des bornes atteintes » appliqué à f' est ce qui permet cette conclusion.

Par ailleurs, ce théorème ne s'applique pas aux fonctions continues sur un intervalle fermé : il faut aussi que l'intervalle en question soit borné.

Q22. Question peu traitée et peu réussie par les candidats.

Q23. L'inégalité de Taylor-Lagrange est un point de cours très peu su par les candidats. L'inégalité est d'ailleurs souvent confondue avec la formule de Taylor-Young et la formule de Taylor avec reste intégral.

Q24. Question plutôt réussie par les quelques candidats l'ayant abordée.

Q25. Le code Python de cette question est mieux réussi que celui de la question **Q12.**.

Q26. Cette question est le théâtre de nombreuses erreurs, parfois lourdes, avec le formalisme des polynômes de matrice : par exemple, $P(M - \lambda I_n)$ n'est pas égal à $P(M) - P(\lambda)$ (où $P \in \mathbb{C}[X]$, $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$).

Le théorème de Rolle est également inutilisable dans un contexte de fonctions de la variable complexe.

Q27. De nombreuses copies proposent un raisonnement basé sur le fait que $\chi_M = P$, ce qui n'est pas le cas.

Q28. Une suite stationnaire n'est pas nécessairement constante, aussi il n'est pas opportun de démontrer le caractère stationnaire de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence sur n.

Q29. Il ne faut pas oublier de soigneusement démontrer que M_n et $P'(M_n)^{-1}$ commutent. La propriété selon laquelle si deux matrices A, B commutent, avec A inversible, alors A^{-1} et B commutent également, mérite justification. De même, il n'a rien d'évident que $P'(M_n)^{-1}$ soit un polynôme en M.

Q31. Seule la partie portant sur l'égalité $AN = NA$ est abordée par les candidats, avec un relatif succès.

Q32. à **Q36.** Questions globalement peu traitées, et très peu réussies.

Il est à noter que le développement limité, à la question **Q32.**, souvent abordé par les candidats, n'est que très rarement réussi, alors qu'il est explicitement donné à la question **Q3.** de ce même sujet.

Conclusion

Il est absolument primordial de se présenter à une épreuve de ce niveau avec une connaissance précise des éléments de cours et une capacité à les manier avec précision et rigueur. Il est également important d'apporter une attention particulière à ce qui semble être considéré par de nombreux candidats – à tort – comme des détails : déclaration des variables, utilisation pertinente des liens logiques (implications, équivalences) et des mots de liaison. Il importe également que les candidats sélectionnent et mentionnent explicitement la totalité des arguments nécessaires pour répondre à chaque question et organisent leur raisonnement avec méthode. Cela pourra par exemple leur éviter d'oublier de traiter certains aspects d'une équivalence ou d'une disjonction de cas. Ce manque de rigueur explique que de nombreux candidats risquent de se retrouver déçus par leur note, ayant eu l'impression de traiter de nombreuses questions du sujet, alors que la plupart des réponses sont incomplètes ou insuffisamment précises.

Le jury tient également à rappeler l'impact significatif d'une copie bien présentée, rédigée dans un français correct. Il en aura été tenu compte dans la notation. Les désagréments impliqués par un manquement à ces règles d'usage sont doubles :

- sur le fond, un certain manque de soin ou une rédaction précipitée fait manquer des points importants de la question ou certaines étapes cruciales d'un raisonnement ;
- sur la forme, l'impression laissée au correcteur par une copie négligée est forcément négative. Pour éviter tout désagrément, le jury recommande aux candidats de soigner leur écriture, de limiter les ratures, d'éviter de multiplier les insertions plus ou moins lisibles ou les renvois vers une autre page, et d'écrire dans un français correct.

Enfin, il n'est pas nécessaire de se précipiter et de traiter un nombre impressionnant de questions pour obtenir un très bon total : il suffit de procéder avec soin, dans un esprit scientifique empreint de rigueur, de discernement et de précision. Le jury encourage les futurs candidats à prendre ces bonnes habitudes dans leur préparation. Les bonnes et très bonnes copies sont, presque sans exception, de cette sorte.