COMMENTAIRES

• Commentaires généraux

Tout d'abord, comme l'an dernier, les mêmes remarques générales :
- Les correcteurs ont signalé à de nombreuses reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées, trop lourdement raturées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur) : **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre**. Les résultats doivent être clairement mis en évidence.
Nous nous interrogeons d'ailleurs sur l'opportunité de mettre des points de présentation.
Il semble que les recherches au brouillon ne sont pas dans la panoplie des méthodes à utiliser pour la réalisation de la composition.
- Trop de candidats utilisent des abréviations utilisées par leurs professeurs mais qui n'ont pas toujours de sens pour le correcteur : il vaut mieux les éviter.
- De même, il est préférable de ne pas écorcher le nom et l'orthographe des théorèmes cités : on voit par exemple trop souvent le « le théorème spectrale », « la loi de poisson » etc.
- Il est rappelé que les copies doivent être correctement numérotées, dans un ordre cohérent.
Dans plusieurs copies les questions ne sont pas traitées dans l'ordre : il n'est pas rare de voir en fin de copie ou en fin de feuille double, des réponses à des questions ébauchées plus haut ou qui avaient été passées.
Parfois, on obtient des réponses à des questions d'un exercice au cours de la résolution d'un autre exercice !
La double numérotation est assez souvent omise : au lieu de la question **2.4.**, on lit question **4.**, puis vient la question **3.**.
- Notons que nous avons de nouveau rencontré cette année des copies quasiment illisibles et donc lourdement pénalisées.
- Signalons aussi que l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.
- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », « il est clair que » « forcément » etc... qui indisposent le correcteur : toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.
- De la même façon, les examinateurs ne goûtent guère des arguments inventés ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé : la donnée d'un tel résultat permet en général de poursuivre la résolution de l'exercice sans avoir pu le démontrer : nous apprécions le candidat qui admet clairement le résultat en question pour continuer.
- Il ne suffit pas d'écrire « je peux utiliser le théorème car ses hypothèses sont vérifiées »... , encore faut-il les vérifier !
- Cette année, nous avons avons particulièrement remarqué :
* un mauvais usage des parenthèses :
-> dans les calculs d'intégrales : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \lambda P(t) + Q(t)\,\mathrm{d}t$,
-> dans les sommes : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + a_n$,

-> dans les factorielles : $2n!$ au lieu de $(2n)!$ etc.
* la fréquente absence des éléments différentiels dans les intégrales,
* l'utilisation de symboles mathématiques comme des abréviations (par exemple : $\mathrm{Ker}(L) \Longrightarrow L(P) = 0_E$)
- La distinction entre « fonction » et « image d'un réel par une fonction » n'est pas souvent faite : très souvent on rencontre des expressions du type « $\sin(t^{\alpha})$ est dérivable et sa dérivée vaut ... »
- Nous conseillons fortement aux candidats de prendre le temps de se relire car cela permet souvent d'éviter des erreurs basiques : par exemple, dans un développement limité, les deux termes de l'égalité ne tendent pas vers la même limite, etc...
- Enfin, un exemple même s'il permet souvent d'aider dans la perception du problème, ne permet pas de démontrer un résultat général.

Les quatre exercices constituant le sujet permettaient de parcourir les parties les plus classiques du programme de deuxième année de classe préparatoire PC.
- Rappelons qu'une lecture attentive de la totalité du sujet permet souvent de comprendre l'architecture et la démarche proposée dans chaque exercice.
- Un trop grand nombre d'étudiants ne maîtrise pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, ainsi que les théorèmes principaux d'analyse du programme de deuxième année de PC et espèrent cependant venir à bout des questions posées en utilisant des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.
En exemple, le Théorème du rang appliqué à une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ prend parfois des formes étranges : $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathrm{Ker}(A) + \dim(\mathrm{Im}(A))$ ou encore, $\dim(A) = \dim(\mathrm{Ker}(A) + \dim(\mathrm{Im}(A))$!
- Nous constatons de nouveau une très grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont trop rapidement abandonnés :
* Les opérations sur les puissances posent encore beaucoup de problème à nombre de candidats.
* On trouve encore trop d'équivalents à 0...
- Les quantificateurs, les symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ sont trop souvent malmenés, voire oubliés lorsqu'ils sont fondamentaux.
- Rappelons que lorsqu'il y a plusieurs variables qui interviennent, il est judicieux de préciser pour quelle variable on cherche un équivalent : une écriture du style $t^{p(n+1)} \underset{+\infty}{\sim}$ ... ne veut pas dire grand chose.
- Reste à signaler que les probabilités génèrent un refus de beaucoup de candidats : près de 30% des candidats n'abordent pas cet exercice : rappelons que nous posons systématiquement un exercice de probabilité.

<u>Conclusion</u> : Nous souhaitons obtenir dans la résolution des exercices proposés **de la rigueur**, **une rédaction claire et lisible** et **une justification des résultats en utilisant à bon escient le cours** : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies, en détaillant clairement les calculs effectués et les théorèmes utilisés à chaque étape de la résolution, sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.
Nous rappelons enfin qu'il vaut mieux admettre clairement le résultat d'une question et avancer dans la résolution du reste de l'exercice plutôt que de donner des arguments faux qui indisposent nécessairement le correcteur.
Nous proposons chaque année dans ce rapport une correction du sujet et invitons vivement les candidats à l'étudier attentivement.

• Commentaires par exercices

Nous avons compilé un certain nombres d'erreurs constatées sur les copies qu'il nous semble important de signaler dans ce rapport afin d'espérer ne plus les rencontrer l'an prochain.

• **Exercice 1**.

Thème de l'exercice : Étude d'une forme linéaire L sur $\mathbb{R}_{2n}[X]$ puis d'un endomorphisme utilisant L sur cet espace.

- **Q1.** : La justification de « forme » est quasiment toujours omise.
- **Q2.** : Le calcul de $L(e_k)$, n'est pas toujours abouti : les cas k pair et k impair ne sont pas traités.
- **Q3.** : Beaucoup d'étudiants oublient qu'ils manipulent une forme linéaire ce qui les amène à effectuer des calculs longs et fastidieux qui n'aboutissent pas. On voit souvent, pour ceux qui utilisent le théorème du rang, que $\dim(\mathbb{R}_{2n}[X]) = 2n$.
  Le fait que la forme linéaire est non nulle est quasiment toujours oublié.
- **Q4.** : Le théorème de la base incomplète est rarement cité.
  Il semble qu'il n'y ait dans $\mathrm{Ker}(L)$ que des vecteurs de la base canonique !
- **Q5.** : Il y a souvent une confusion entre « complémentaire » et « supplémentaire », ce qui amène un candidat à penser qu'il y a une erreur dans l'énoncé puisque le vecteur e_2 n'est ni dans $\mathrm{Vect}(e_0)$, ni dans $\mathrm{Ker}(L)$ et donc, on ne peut avoir $\mathrm{Vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L) = E$.
  Pour montrer que $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont orthogonaux, certains étudiants tentent d'effectuer le produit scalaire $(\mathrm{Vect}(e_0)|\mathrm{Ker}(L)) = \int_{-1}^{1} \mathrm{Vect}(e_0)\,\mathrm{Ker}(L)\,\mathrm{d}t = 0$ puisque $\mathrm{Vect}(e_0) = 0$!
  Enfin pour montrer que les sous-espaces $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont en somme directe, un nombre non négligeable de candidats tente d'établir que $\mathrm{Vect}(e_0) \cap \mathrm{Ker}(L) = \varnothing$
- **Q6.1.** : La partie « stabilité » est souvent escamotée ou simplement énoncée sans justification.
  Il semble y avoir dans l'esprit de certains une confusion entre dimension et degré : $\deg(T_\lambda(P) \leqslant 2n + 1 = \dim(E)$.
- **Q6.2.** : Il reste souvent un terme résiduel $L^2(P)$ dont l'étudiant ne sait que faire.
- **Q6.3.** : La matrice, lorsqu'elle est proposée sans calculs justificatifs est souvent incorrecte : rappelons que tout résultat énoncé dans la copie se doit d'être justifié.
  On trouve aussi parfois des vecteurs e_j dans la matrice.
- **Q6.4.** : Bien traitée pour ceux qui ont la bonne matrice.
- **Q6.5.** : Traitée par très peu de candidats. L'argument : « la matrice de T_λ n'est pas l'identité » est très rarement évoqué.
- **Q7.** et **Q8.** : très rarement abordées.

• **Exercice 2**.

Thème de l'exercice : Exercice de probabilité à partir d'une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson.

- **Q1.1.** : $X(\Omega)$ est régulièrement oublié et dans $\mathbb{P}(X = k)$ on constate souvent l'oubli d'un ou plusieurs facteurs.
- **Q1.2.** : Parmi les fautes les plus courantes : présence d'un $(-1)^k$, oubli des factorielles, interversion entre **sh** et **ch**, domaine égal à $]-1, 1[$,...
- **Q1.3.** : L'indépendance de deux variables aléatoires discrètes semble très mystérieuse pour beaucoup : « lorsqu'elles ne dépendent pas l'une de l'autre ».
  Cette question de cours que nous pensions facile n'a pas permis aux étudiants de rapporter des points.
- **Q2.1.** : Les réunions sont quasiment toujours absentes. Par exemple, (X pair) se traduit par $X = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, sans même un quelconque quantificateur.
- **Q2.2.** : Parmi les étudiants qui effectuent correctement les calculs, $Y(\Omega)$ est rarement rappelé.
- **Q3.1.** : Le produit des supports est parfois écrit, sans simplification.
- **Q3.2.** : Souvent l'évènement $(T = k)$ est exprimé à l'aide d'évènements $(X = j)$ et $(2X = j)$ sans expliciter de lien entre k et j.
- **Q3.3.** : Les cas pairs et impairs ne sont pas toujours distingués.
- **Q3.4.** : Confusion entre $\mathbb{P}(T$ prend des valeurs paires$)$ et $\mathbb{P}(T = 2k)$.

• **Exercice 3**.

Thème de l'exercice : Étude de la convergence simple et absolue d'une série dépendant d'un paramètre.

- **Q1.** : Résultats décevants pour cette question : les cas $x \in [0, 1]$ et $x \geqslant 1$ ne sont pas toujours distingués.
  Une figure permettait de voir efficacement ce qui se passait.
- **Q2.1.** et **Q2.2.** : La continuité voire la continuité par morceaux sert parfois à justifier la dérivabilité.
- **Q2.3.** : La majoration $|\cos(t)| \leqslant 1$ est rare : lui est en général préférée la double inégalité $-1 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$, ce qui entraîne de nombreuses erreurs.
  On a souvent rencontré : $|a - b| \leqslant |a| - |b|$!
- **Q2.4.** : L'appel au théorème des accroissements finis n'est pas souvent fait : il est remplacé par la fausse égalité $\dfrac{\varphi(t) - \varphi(n)}{t - n} = \varphi'(n)$ qui permet d'obtenir l'inégalité demandée.
- **Q3.** : Assez bien réussie dans l'ensemble.
- **Q4.1.** : La valeur absolue est souvent oubliée.
  On lit aussi :
  * les fonctions cos et $\dfrac{1}{t^2}$ sont intégrables sur $[1 + \infty[$ et donc, $\dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1 + \infty[$,
  * $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\cos(t)}{t^2} = 0$ et donc, $\dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1 + \infty[$.

- **Q4.2.** : L'intégration par parties généralisée est souvent faite directement sans justification de convergence.
- **Q5.** : Le changement de variable $t = t^{\alpha}$ ne peut pas fonctionner !
- **Q6.** : La comparaison série/intégrale est souvent évoquée mais, l'écriture $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} = \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ fait alors office de justification de la convergence de la série $\sum u_n$.
- **Q7.** : Attention aux majorations : $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$!
- **Q9.1.** et **9.2.** : Les candidats qui ont abordé cette question pensent bien à utiliser la première question.
  Par contre, souvent, ils ne voient pas de problème de convergence malgré l'apparition de la série harmonique.

• **Exercice 4**.

Thème de l'exercice : Produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$ et projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

- **Q1.** : Question assez mal réussie.
  Malgré l'énoncé qui parlait de convergence absolue, certains candidats oublient les valeurs absolues.
  D'autres pensent qu'il s'agit d'un produit de Cauchy !
  On a noté que beaucoup de candidats ont des difficultés à calculer la valeur prise par un polynôme en un point : si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, le calcul de $P(n)$ pose beaucoup de problèmes.
- **Q2.1.** : Rappelons que ré-écrire l'énoncé ne rapporte pas de point.
  L'argument du polynôme qui possède une infinité de racines est rarement évoqué.
- **Q2.2.** : Le caractère positif est très souvent omis par des candidats qui pensent que cela a été démontré dans la question précédente.
  D'autre tentent en vain de prouver que : $(P|P) \geqslant 0 \Longrightarrow P \geqslant 0$.
- **Q3.1.** : Si la somme de la série géométrique est en général sue il n'en est pas de même de l'ensemble de définition de $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$.
- **Q3.2.** : On a remarqué dans cette question des confusions entre les variables : $\mathrm{e}^{-nx} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et comme la série $\sum \dfrac{1}{x^2}$ converge il en est de même de la série $\sum \mathrm{e}^{-nx}$ pour tout $x > 0$!
- **Q3.4.** : On retrouve les erreurs classiques sur les puissance : $\mathrm{e}^{-nx} = \mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{e}^{x}$ et donc $g(x) = \mathrm{e}^{-n} \times f(x)$!
- **Q3.4.** -> **Q4.3.** : Ces questions sont très rarement abordées.
  Signalons cependant que les étudiants qui s'y sont frottés ont en général bien réussi même s'ils ne reconnaissent pas toujours l'utilisation de la projection orthogonale pour calculer la distance demandée.