1 Mathématiques

1.1 Remarques générales et conseils

Nous incitons les candidats à apprendre leur cours de mathématiques de première et de deuxième année en profondeur, de manière à maîtriser les notions et les théorèmes du programme. Nous leur conseillons également de s'entraîner intensivement au calcul, en particulier à la manipulation des inégalités.

Plusieurs erreurs relevées l'an dernier ont été commises de nouveau cette année.

Une **présentation soignée** (écriture nette, absence de ratures, résultats encadrés) dispose très favorablement le correcteur. Les correcteurs ont été étonnés par le manque de soin, beaucoup de copies ressemblent plus à un brouillon qu'à une épreuve de concours.

Les encres pâles sont encore fréquentes, et un nombre croissant de candidats a obligé les correcteurs à utiliser la loupe tant leur écriture est minuscule.

On recommande aux candidats d'employer une encre foncée, restant bien visible après numérisation. Le texte et les calculs sont souvent agrémentés de petites zones de texte coloré insérées avec des flèches par des candidats ne prenant pas la peine de rédiger une phrase pour justifier une assertion ou une expression.

Il est demandé de numéroter les copies de façon cohérente, les correcteurs n'aimant pas être confrontés à un jeu de piste.

Il est fortement conseillé d'aborder et de rédiger les questions dans l'ordre de l'énoncé.

On recommande de bien traiter une partie des questions plutôt que de produire un discours inconsistant pour chacune d'entre elles. Certaines copies obtiennent une note très faible en prétendant répondre à la quasi-totalité des questions. Nous rappelons que les questions « faciles » doivent être correctement rédigées pour être complètement prises en compte, surtout en début de problème.

La rédaction est un élément essentiel d'appréciation. Elle est en fait difficilement dissociable du fond. On attend notamment des candidats la vérification de l'existence des objets manipulés, une déclaration claire des objets utilisés, un maniement soigneux des inégalités (notamment distinction entre inégalité large et inégalité stricte). Chaque théorème utilisé doit être clairement et complètement énoncé.

La rédaction des preuves doit être courte et complète ; tous les arguments sont attendus.

Les tentatives de bluff n'apportent aucun point et préviennent très défavorablement le correcteur quant à l'ensemble de la copie.

Nous suggérons également aux candidats de se relire, de manière à éviter de laisser subsister dans leur travail des absurdités criantes (par exemple, des inégalités entre nombres complexes).

Nous soulignons également l'importance d'une lecture rigoureuse de l'énoncé, qui guide la réflexion et permet d'éviter certaines erreurs.

Les copies doivent être rédigées en Français. Les paragraphes doivent commencer à gauche de la page et non au milieu, les phrases doivent commencer par une majuscule et se terminer par un point. Quant aux connecteurs logiques $\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$, ce ne sont pas des marques d'inférence et ils ne doivent donc pas remplacer « donc », « ainsi », « c'est pourquoi », etc.

Les abréviations sont pléthore, au point de rendre la lecture parfois difficile en raison de l'ambiguïté qui peut en résulter : comment savoir que ISMQ signifie « il suffit de montrer que » ?

L'orthographe et la syntaxe sont souvent défectueuses ; des démonstrations par l'absurde se terminent par « donc impossible ».

Trop régulièrement les candidats redéfinissent sur leur copie les objets déjà définis par l'énoncé (par exemple ils écrivent « Soit $A = \dots$ » à la première question). Inversement, trop de candidats ne prennent pas la peine d'introduire leurs propres notations.

Beaucoup de symboles mathématiques sont utilisés comme abréviations, et certains candidats utilisent des abréviations surprenantes (dc, sq, dz, sars, ...) potentiellement inconnues du correcteur. Attention aux notations non définies dans le programme et potentiellement ambigües : par exemple, utiliser $\sim$ pour désigner la similitude entre matrices est porteur de confusion avec l'équivalence entre matrices, et la signification de cette notation doit donc être précisée dans la copie dès sa première utilisation.

1.4.2 Commentaires généraux

Le sujet demandait une bonne maîtrise des inégalités élémentaires et de l'intégration (intégrales généralisées, intégrales à paramètres, théorème de convergence dominée). Le sujet était tout à fait abordable et d'une longueur en rapport avec la durée de l'épreuve. Les candidats ont eu le temps de traiter l'ensemble des questions. La plupart demandaient une bonne connaissance du cours et de la rigueur dans les calculs et les inégalités.

L'étalonnement des copies est satisfaisant. Certains étudiants ont traité correctement une grande part du sujet, mais un grand nombre de copies mettent en évidence de grosses lacunes dans la manipulation des inégalités et des théorèmes du cours, ainsi qu'un manque de rigueur.

1.4.3 Conseils aux futurs candidats

Nous incitons les candidats à apprendre avec précision leur cours et à s'entraîner à la manipulation des inégalités.

D'autre part, il vaut mieux résoudre correctement et rédiger correctement moins de questions plutôt que d'aborder beaucoup de questions de manière superficielle.

Il est également important de citer précisément les numéros des questions utilisées lorsque le candidat utilise un résultat montré précédemment.

La présentation est très importante. Il faut écrire lisiblement, séparer les arguments utilisés et surtout ne pas tenter de tromper le correcteur avec des calculs truqués ou raccourcis.

1.5 Mathématiques 2 - filière PC

1.5.1 Généralités et présentation du sujet

Le problème proposé consistait en l'étude des matrices dites « de distance euclidienne », i.e. des matrices symétriques $A = (a_{i,j})$ dont les coefficients sont $a_{i,j} = \mathrm{dist}(X_i, X_j)^2$, où (X_i) est une famille de points dans un espace euclidien. En particulier, il s'agissait de construire des matrices de distance euclidienne ayant un spectre imposé.

Le sujet comportait cinq parties de difficulté variable, mais non progressive. Les parties 1 et 2, plus abordables, ont permis d'évaluer les connaissances acquises et la maîtrise des bases de l'algèbre linéaire. Quelques questions qui semblaient accessibles dans les parties suivantes ont conduit à des compositions lacunaires, les candidats partant à la recherche des questions les plus abordables.

Ainsi, le jury a constaté que, bien souvent, un grand nombre de notions fondamentales n'étaient pas maîtrisées par les candidats, et que leurs réponses (y compris aux questions les plus faciles) manquaient de justifications satisfaisantes.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe D.

1.5.2 Conseils aux candidats

Il est possible d'améliorer sensiblement sa performance en prêtant attention aux points suivants.

- Rédiger de façon efficace. Trop de candidats perdent beaucoup de temps en des développements qui partent d'une bonne intention, mais sont beaucoup trop longs. En outre, des pages et des pages de calculs sont très certainement signe d'erreur de départ ou de méthode inadaptée.

- Soigner la rédaction. Les correcteurs ne peuvent attribuer la totalité des points qu'aux réponses complètes et précises. Ce point n'est pas en contradiction avec le précédent : il y a là un équilibre à trouver, qui est constitutif de l'épreuve.
- Ne pas « tricher ». Les correcteurs sanctionnent inéluctablement toute tentative d'escroquerie.
- Prendre le temps de lire le sujet en entier avant de commencer à rédiger, afin de bien saisir les objectifs et l'organisation du texte. Bien comprendre ce qui vous est demandé.

1.5.3 Conclusion

Le jury a été perplexe devant le grand nombre d'erreurs de logique et le manque de maîtrise -par certains candidats- de notions fondamentales et de résultats incontournables. Même si nous avons pu nous réjouir de la présence d'un grand nombre de copies excellentes, l'existence de questions de cours (à l'image de la 5) permettant d'évaluer l'assimilation des fondamentaux, nous a permis de constater de grandes différences de niveau de préparation des candidats.

Le jury ne peut que recommander une fois encore aux candidats de s'appuyer sur une solide connaissance du cours, et de ne surtout pas négliger l'entraînement technique indispensable à toute pratique scientifique.

1.6 Mathématiques 1 - filière PSI

1.6.1 Généralités et présentation du sujet

Dans tout ce qui suit, φ désigne la fonction gaussienne $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Le but du problème est, pour une fonction f strictement positive de classe C^2 et à croissance lente (notion définie dans l'énoncé) vérifiant en outre la condition de normalisation,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx = 1,$$

d'introduire et de majorer l'entropie

$$Ent_\varphi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} ln(f(x))f(x)\varphi(x)dx,$$

en fonction de l'intégrale,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)dx.$$

Le résultat est obtenu à la question 20 du problème sous des hypothèses de croissance lente portant sur les dérivées de f.

La bonne définition de l'entropie est démontrée au début de la partie 3 avant la preuve effective du résultat final qui s'appuie de manière essentielle sur une transformation intégrale P_t à paramètre continu t.

La première partie débute par des considérations générales sur les fonctions à croissance lente (questions 1 à 3). Les questions 1 et 3 ont déjà permis à certains bons candidats de montrer leurs qualités de raisonnement. Cette partie se poursuit en étudiant, pour $t \in \mathbb{R}_+$, les propriétés de la fonction $P_t(f)$ (on montre en particulier qu'elle est à croissance lente à la question 6). Elle se termine par la preuve d'une formule intégrale faisant intervenir un opérateur différentiel.

D Mathématiques 2 PC

Pour préciser les affirmations précédentes, voici une extraction des erreurs rencontrées.

Première partie

Q1 - Des erreurs très surprenantes à cette première question. Notamment des matrices avec des coefficients 0 quand ceux explicitement demandés sont ± 1, ou alors des matrices visiblement non inversibles.

Q2 - Beaucoup de candidats ne connaissent pas la définition d'une matrice orthogonale (ou alors ne font pas clairement voir qu'ils la connaissent). Signalons au passage une caractérisation erronée des matrices orthogonales à l'aide du déterminant rencontrée trop souvent. Le plus simple était de dire que les colonnes (ou les lignes) constituent une famille orthonormale. Ceux qui ont utilisé la caractérisation $A^\top A = I_n$ se sont embarqués dans des calculs de coefficients indigestes qui peuvent remplir des pages et ont ainsi perdu énormément de temps. Par ailleurs, « la matrice reste forcément orthogonale' » n'est pas une démonstration.

Q3 - La parité de n était le résultat d'un calcul simple de produit scalaire. Encore une fois, le déterminant a été souvent utilisé à tort. Comme avant, la réponse « en utilisant les différentes opérations de Q2 on obtient la matrice voulue » n'a pas été validée comme une démonstration.

Q4 - Cette question a été peu traitée.

Deuxième partie

Q5 - Une trop grande partie des candidats semblent mal connaître le théorème spectral. L'existence d'une base orthonormée composée de vecteurs propres est oubliée (ou maladroitement redemontrée, en admettant alors le caractère diagonalisable), l'utilisation souvent citée du procédé de Gram-Schmidt est ici hors sujet.

Q6 - Cette question a été bien traitée moins souvent qu'on aurait pu l'espérer. On a pu lire $\dim(A \cup B)$ la dimension d'une réunion d'espaces vectoriels, l'affirmation que $\mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B) \neq \{0\} \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ et des démonstrations impliquant les dimensions des espaces très mal justifiées. Un grand nombre de candidats ont pensé pouvoir extraire de la base $(e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ une base du sous-espace vectoriel S_k, ou alors sont persuadés que e_k appartient à S_k, ce qui est faux en général.

Q7 - Q8 - Beaucoup de candidats ont décomposé les vecteurs dans une base inadaptée $(x_1, \ldots, x_n)$ avant de procéder à une minoration du produit scalaire erronée. Beaucoup font des calculs en s'imaginant que tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont des vecteurs propres de f. Même chose en question 8.

Q9 - Le début de la question 9 a été bien traité globalement. La deuxième partie proposée beaucoup moins, l'apparition du terme $uu^\top$ restant souvent mystérieuse.

Troisième partie

Q10 - À cette question, la plupart du temps on n'a que la symétrie de P. Beaucoup de confusions entre inclusion et égalité pour les sous-espaces caractéristiques de P.

Q11 - La première partie a été bien traitée (même si parfois on attendait de voir une justification plus complète). Encore une fois la conclusion demandée était, le plus souvent, absente des copies.

Quatrième partie

Q16 - La question 16 a été bien traitée même par des candidats qui n'avaient pas réussi les questions précédentes.

Q18 - La question 18 était peu traitée, le plus souvent partiellement.

Cinquième partie

Les questions de cette partie n'ont été que rarement bien traitées.