1 Mathématiques

1.1 Remarques générales et conseils

Nous incitons les candidats à apprendre leur cours de mathématiques de première et de deuxième année en profondeur, de manière à maîtriser les notions et les théorèmes du programme. Nous leur conseillons également de s'entraîner intensivement au calcul, en particulier à la manipulation des inégalités.

Plusieurs erreurs relevées l'an dernier ont été commises de nouveau cette année.

Une **présentation soignée** (écriture nette, absence de ratures, résultats encadrés) dispose très favorablement le correcteur. Les correcteurs ont été étonnés par le manque de soin, beaucoup de copies ressemblent plus à un brouillon qu'à une épreuve de concours.

Les encres pâles sont encore fréquentes, et un nombre croissant de candidats a obligé les correcteurs à utiliser la loupe tant leur écriture est minuscule.

On recommande aux candidats d'employer une encre foncée, restant bien visible après numérisation. Le texte et les calculs sont souvent agrémentés de petites zones de texte coloré insérées avec des flèches par des candidats ne prenant pas la peine de rédiger une phrase pour justifier une assertion ou une expression.

Il est demandé de numéroter les copies de façon cohérente, les correcteurs n'aimant pas être confrontés à un jeu de piste.

Il est fortement conseillé d'aborder et de rédiger les questions dans l'ordre de l'énoncé.

On recommande de bien traiter une partie des questions plutôt que de produire un discours inconsistant pour chacune d'entre elles. Certaines copies obtiennent une note très faible en prétendant répondre à la quasi-totalité des questions. Nous rappelons que les questions « faciles » doivent être correctement rédigées pour être complètement prises en compte, surtout en début de problème.

La rédaction est un élément essentiel d'appréciation. Elle est en fait difficilement dissociable du fond. On attend notamment des candidats la vérification de l'existence des objets manipulés, une déclaration claire des objets utilisés, un maniement soigneux des inégalités (notamment distinction entre inégalité large et inégalité stricte). Chaque théorème utilisé doit être clairement et complètement énoncé.

La rédaction des preuves doit être courte et complète ; tous les arguments sont attendus.

Les tentatives de bluff n'apportent aucun point et préviennent très défavorablement le correcteur quant à l'ensemble de la copie.

Nous suggérons également aux candidats de se relire, de manière à éviter de laisser subsister dans leur travail des absurdités criantes (par exemple, des inégalités entre nombres complexes).

Nous soulignons également l'importance d'une lecture rigoureuse de l'énoncé, qui guide la réflexion et permet d'éviter certaines erreurs.

Les copies doivent être rédigées en Français. Les paragraphes doivent commencer à gauche de la page et non au milieu, les phrases doivent commencer par une majuscule et se terminer par un point. Quant aux connecteurs logiques $\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$, ce ne sont pas des marques d'inférence et ils ne doivent donc pas remplacer « donc », « ainsi », « c'est pourquoi », etc.

Les abréviations sont pléthore, au point de rendre la lecture parfois difficile en raison de l'ambiguïté qui peut en résulter : comment savoir que ISMQ signifie « il suffit de montrer que » ?

L'orthographe et la syntaxe sont souvent défectueuses ; des démonstrations par l'absurde se terminent par « donc impossible ».

Trop régulièrement les candidats redéfinissent sur leur copie les objets déjà définis par l'énoncé (par exemple ils écrivent « Soit $A = \dots$ » à la première question). Inversement, trop de candidats ne prennent pas la peine d'introduire leurs propres notations.

Beaucoup de symboles mathématiques sont utilisés comme abréviations, et certains candidats utilisent des abréviations surprenantes (dc, sq, dz, sars, ...) potentiellement inconnues du correcteur. Attention aux notations non définies dans le programme et potentiellement ambigües : par exemple, utiliser $\sim$ pour désigner la similitude entre matrices est porteur de confusion avec l'équivalence entre matrices, et la signification de cette notation doit donc être précisée dans la copie dès sa première utilisation.

- Soigner la rédaction. Les correcteurs ne peuvent attribuer la totalité des points qu'aux réponses complètes et précises. Ce point n'est pas en contradiction avec le précédent : il y a là un équilibre à trouver, qui est constitutif de l'épreuve.

- Ne pas « tricher ». Les correcteurs sanctionnent inéluctablement toute tentative d'escroquerie.

- Prendre le temps de lire le sujet en entier avant de commencer à rédiger, afin de bien saisir les objectifs et l'organisation du texte. Bien comprendre ce qui vous est demandé.

1.5.3 Conclusion

Le jury a été perplexe devant le grand nombre d'erreurs de logique et le manque de maîtrise -par certains candidats- de notions fondamentales et de résultats incontournables. Même si nous avons pu nous réjouir de la présence d'un grand nombre de copies excellentes, l'existence de questions de cours (à l'image de la 5) permettant d'évaluer l'assimilation des fondamentaux, nous a permis de constater de grandes différences de niveau de préparation des candidats.

Le jury ne peut que recommander une fois encore aux candidats de s'appuyer sur une solide connaissance du cours, et de ne surtout pas négliger l'entraînement technique indispensable à toute pratique scientifique.

1.6 Mathématiques 1 - filière PSI

1.6.1 Généralités et présentation du sujet

Dans tout ce qui suit, φ désigne la fonction gaussienne $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Le but du problème est, pour une fonction f strictement positive de classe C^2 et à croissance lente (notion définie dans l'énoncé) vérifiant en outre la condition de normalisation,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx = 1,$$

d'introduire et de majorer l'entropie

$$Ent_\varphi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} ln(f(x))f(x)\varphi(x)dx,$$

en fonction de l'intégrale,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)dx.$$

Le résultat est obtenu à la question 20 du problème sous des hypothèses de croissance lente portant sur les dérivées de f.

La bonne définition de l'entropie est démontrée au début de la partie 3 avant la preuve effective du résultat final qui s'appuie de manière essentielle sur une transformation intégrale P_t à paramètre continu t.

La première partie débute par des considérations générales sur les fonctions à croissance lente (questions 1 à 3). Les questions 1 et 3 ont déjà permis à certains bons candidats de montrer leurs qualités de raisonnement. Cette partie se poursuit en étudiant, pour $t \in \mathbb{R}_+$, les propriétés de la fonction $P_t(f)$ (on montre en particulier qu'elle est à croissance lente à la question 6). Elle se termine par la preuve d'une formule intégrale faisant intervenir un opérateur différentiel.

La partie 2 permet d'obtenir une équation aux dérivées partielles sur la fonction $(t, x) \mapsto P_t(f)(x)$, en établissant au passage toutes les propriétés de régularité nécessaires.

Ces deux parties ont fourni l'occasion de tester à plusieurs reprises la maîtrise des candidats sur les théorèmes de régularité des intégrales à paramètre.

La partie 3 utilise les résultats établis précédemment sur la fonction $P_t(f)$ pour donner d'abord une expression exacte de la dérivée de l'entropie $Ent_\varphi(P_t(f))$, avant de la majorer (en valeur absolue) en fonction de,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_t(\frac{f'^2}{f})(x)\varphi(x)dx.$$

On en déduit la majoration finale par intégration entre 0 et $+\infty$. Cette dernière partie comportait plusieurs questions difficiles.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe E.

1.6.2 Thématiques abordées et généralités sur les copies

Il s'agissait d'un sujet assez technique comportant peu de questions faciles qui a permis de classer efficacement les candidats. Le problème porte essentiellement sur les intégrales impropres, en particulier dans leur version à paramètre. Il nécessite une très bonne connaissance des théorèmes de convergence dominée et de leur champ d'application (les candidats devaient faire preuve de discernement pour savoir quand une version locale était requise) et une certaine habileté technique pour établir à plusieurs reprises des majorations en valeur absolue (hypothèses de domination).

À ce propos, signalons que beaucoup de copies ont affiché des lacunes sur ce point. Une erreur extrêmement fréquente est de passer abusivement de majorations du type $f(x) \leq a$ à $|f(x)| \leq |a|$. Dans la plupart des cas une simple application de l'inégalité triangulaire permettait d'obtenir les majorations souhaitées.

Les questions relatives à la régularité des intégrales à paramètre susmentionnées ont permis de valoriser à la fois la connaissance précise des énoncés du cours et de récompenser l'habileté technique des bons candidats lors de la vérification des hypothèses de domination.

Les questions utilisant l'intégration par parties sur des intégrales impropres (questions 7 et 10) ont permis aux étudiants soigneux de se mettre en avant. Enfin certaines questions assez délicates au début et à la fin du sujet ont permis de distinguer les meilleures copies.

Une majorité de candidats a démontré une bonne connaissance du cours, mais beaucoup restent perfectibles sur le plan technique.

Pour les futurs candidats, rappelons que les techniques de majoration, et en particulier l'inégalité triangulaire, sont des outils fondamentaux de l'analyse et qu'il semble un peu vain d'utiliser des résultats aussi puissants que les théorèmes de convergence dominée s'ils ne sont pas adossés à une maîtrise suffisante de ces méthodes élémentaires. Nous encourageons les élèves préparant les concours à répéter leurs gammes en pratiquant régulièrement des exercices techniques.

Terminons avec un mot sur la présentation des copies : la vérification des différentes hypothèses des théorèmes de convergence dominée a donné lieu à des développements d'une longueur parfois abusive, où les arguments significatifs mathématiquement peinaient à se détacher de vérifications plus triviales. Rappelons que la concision des raisonnements fait partie des qualités attendues dans une copie de mathématiques. Le jury encourage donc les futurs candidats à adopter une présentation plus compacte et structurée en utilisant davantage d'outils tels que le passage à la ligne, l'indentation ou l'utilisation de tirets.

E Mathématiques 1 PSI

Q1 - Question assez souvent mal traitée. Des majorations du type $|x|k \leq |x|d$ lorsque $k \leq d$ sont données sans discussion sur $|x|$. La manipulation et plus particulièrement l'ordre des quantificateurs est mal maitrisée dans de trop nombreuses copies. Un nombre assez significatif de candidats a tout de même su proposer une preuve bien rédigée en distinguant les cas $|x| \leq 1$ et $|x| \geq 1$. Ils en ont été récompensés. À noter qu'une autre preuve possible consistait à montrer que $P(|x|)/(1+|x|^d)$, pour P polynôme de degré d à coefficients positifs, est majorée, en utilisant la continuité et la limite à l'infini. Elle a été assez peu rencontrée.

Q2 - Question le plus souvent bien traitée, la plupart du temps en montrant que $y^2 f(e^{-t}x+y\sqrt{1-e^{-2t}})$ tend vers 0 quand $|y|$ tend vers $+\infty$. Signalons tout de même qu'un nombre non négligeable de candidats a interprété $f\varphi$ comme une composée au lieu d'un produit.

Q3 - Le fait que $0 \in CL(\mathbb{R})$ a le plus souvent été mentionné. Pour la stabilité par combinaison linéaire et par produit, bon nombre de candidats établissent des majorations polynomiales en $|x|$, mais ne pensent pas à conclure simplement à l'aide de la question 1.

Q4 - La linéarité de P_t a presque toujours été vérifiée. La bonne définition de $P_t(f)$ a été assez souvent mal justifiée : ce n'est pas une conséquence directe de la question 2, elle nécessite de revenir à la définition d'une fonction à croissance lente. Le jury déplore la fausse majoration $|x+y|^k \leq |x|^k + |y|^k$ souvent apparue en invoquant l'inégalité triangulaire, cette erreur se reproduisant généralement au cours des questions suivantes.

Q5 - Le point délicat est bien sûr l'hypothèse de domination. Elle a souvent donné lieu à des majorations illicites de la quantité $|e^{-t}x+y\sqrt{1-e^{-2t}}|$ là où une simple inégalité triangulaire permettait de conclure rapidement.

Q6 - Pour la première partie de la question, un nombre significatif de candidats a pensé à se placer sur un segment pour appliquer la version locale du théorème de continuité des intégrales à paramètre ; l'obtention de la domination a donné lieu au même genre d'erreurs qu'en 5. La deuxième partie de la question a été traitée correctement dans les bonnes copies seulement.

Q7 - Beaucoup ont pensé à l'intégration par parties avec le plus souvent une bonne justification de la valeur du crochet. En revanche un nombre conséquent de candidats ne pense pas à justifier la convergence d'au moins l'une des intégrales.

Q8 - À nouveau peu de copies obtiennent proprement la domination. En particulier la majoration de $\frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}$ pour $t \in [a,b]$ (avec $0 < a < b$) est le plus souvent soit fausse, soit non justifiée.

Q9 - Même remarques que ci-dessus.

Q10 - Une bonne partie des candidats ne pensent pas à une intégration par parties.

Q11 - Question facile le plus souvent réussie. Quelques copies ont cependant prétendu obtenir un équivalent polynomial de $t\ ln(t)$ en 0^+ ce qui témoigne d'un manque de recul sur les notions de base.

Q12 - L'une des questions les plus difficiles du sujet : elle nécessitait de majorer $ln(g(x))$ en valeur absolue ce qui amenait à discuter de la position de $g(x)$ par rapport à 1, puis à utiliser la question 11. Seules quelques excellentes copies ont su traiter cette question avec rigueur.

Q13 - Il s'agissait d'appliquer la question 12 à $P_t(f)$. Il fallait donc rappeler pourquoi $P_t(f)$ en satisfaisait les hypothèses. Question globalement réussie.

Q14 - La preuve de l'indication donnée utilisait à nouveau le théorème de continuité des intégrales à paramètre ; elle a été valorisée. La fin de la question qui reprenait en grande partie les arguments de la question 12, n'a presque jamais été traitée correctement.

Q15 - La première partie de la question a été la plupart du temps réussie. La deuxième partie de la question faisait à nouveau appel à un théorème de convergence dominée ; l'hypothèse de domination, assez difficile à établir, reprenait les majorations vues en question 14. Elle n'a pratiquement jamais été traitée correctement.

Q16 - On attendait une référence à la question 10 dont il fallait rappeler les hypothèses.

Q17 - On attendait une référence précise à la question 9 pour l'expression de $(P_t(f))'$ en fonction de $P_t(f')$.

Q18 - Question plus subtile qu'il n'y parait, bien traitée dans quelques très bonnes copies seulement.

Q19 - Il fallait utiliser le résultat admis en fin de question 6. Cela n'a pas toujours été vu, ce qui a donné lieu à des tentatives de preuve par majoration non abouties.

Q20 - L'idée de la preuve a souvent été donnée par les candidats ayant abordé cette question. Cela concerne un nombre restreint de copies. RETOUR