1 Mathématiques

1.1 Remarques générales et conseils

Nous incitons les candidats à apprendre leur cours de mathématiques de première et de deuxième année en profondeur, de manière à maîtriser les notions et les théorèmes du programme. Nous leur conseillons également de s'entraîner intensivement au calcul, en particulier à la manipulation des inégalités.

Plusieurs erreurs relevées l'an dernier ont été commises de nouveau cette année.

Une **présentation soignée** (écriture nette, absence de ratures, résultats encadrés) dispose très favorablement le correcteur. Les correcteurs ont été étonnés par le manque de soin, beaucoup de copies ressemblent plus à un brouillon qu'à une épreuve de concours.

Les encres pâles sont encore fréquentes, et un nombre croissant de candidats a obligé les correcteurs à utiliser la loupe tant leur écriture est minuscule.

On recommande aux candidats d'employer une encre foncée, restant bien visible après numérisation. Le texte et les calculs sont souvent agrémentés de petites zones de texte coloré insérées avec des flèches par des candidats ne prenant pas la peine de rédiger une phrase pour justifier une assertion ou une expression.

Il est demandé de numéroter les copies de façon cohérente, les correcteurs n'aimant pas être confrontés à un jeu de piste.

Il est fortement conseillé d'aborder et de rédiger les questions dans l'ordre de l'énoncé.

On recommande de bien traiter une partie des questions plutôt que de produire un discours inconsistant pour chacune d'entre elles. Certaines copies obtiennent une note très faible en prétendant répondre à la quasi-totalité des questions. Nous rappelons que les questions « faciles » doivent être correctement rédigées pour être complètement prises en compte, surtout en début de problème.

La rédaction est un élément essentiel d'appréciation. Elle est en fait difficilement dissociable du fond. On attend notamment des candidats la vérification de l'existence des objets manipulés, une déclaration claire des objets utilisés, un maniement soigneux des inégalités (notamment distinction entre inégalité large et inégalité stricte). Chaque théorème utilisé doit être clairement et complètement énoncé.

La rédaction des preuves doit être courte et complète ; tous les arguments sont attendus.

Les tentatives de bluff n'apportent aucun point et préviennent très défavorablement le correcteur quant à l'ensemble de la copie.

Nous suggérons également aux candidats de se relire, de manière à éviter de laisser subsister dans leur travail des absurdités criantes (par exemple, des inégalités entre nombres complexes).

Nous soulignons également l'importance d'une lecture rigoureuse de l'énoncé, qui guide la réflexion et permet d'éviter certaines erreurs.

Les copies doivent être rédigées en Français. Les paragraphes doivent commencer à gauche de la page et non au milieu, les phrases doivent commencer par une majuscule et se terminer par un point. Quant aux connecteurs logiques $\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$, ce ne sont pas des marques d'inférence et ils ne doivent donc pas remplacer « donc », « ainsi », « c'est pourquoi », etc.

Les abréviations sont pléthore, au point de rendre la lecture parfois difficile en raison de l'ambiguïté qui peut en résulter : comment savoir que ISMQ signifie « il suffit de montrer que » ?

L'orthographe et la syntaxe sont souvent défectueuses ; des démonstrations par l'absurde se terminent par « donc impossible ».

Trop régulièrement les candidats redéfinissent sur leur copie les objets déjà définis par l'énoncé (par exemple ils écrivent « Soit $A = \dots$ » à la première question). Inversement, trop de candidats ne prennent pas la peine d'introduire leurs propres notations.

Beaucoup de symboles mathématiques sont utilisés comme abréviations, et certains candidats utilisent des abréviations surprenantes (dc, sq, dz, sars, ...) potentiellement inconnues du correcteur. Attention aux notations non définies dans le programme et potentiellement ambigües : par exemple, utiliser $\sim$ pour désigner la similitude entre matrices est porteur de confusion avec l'équivalence entre matrices, et la signification de cette notation doit donc être précisée dans la copie dès sa première utilisation.

1.7 Mathématiques 2 - filière PSI

1.7.1 Présentation générale et intérêt scientifique du sujet

Le but ultime du sujet était d'étudier un équivalent du nombre de retours à zéro sur n pas, dans deux situations :

- une marche aléatoire symétrique (questions **14** à **19**) ;
- un tirage sans remise dans une urne initialement équilibrée (questions **20** et **21**).

Afin d'obtenir lesdits équivalents, il était nécessaire de disposer de plusieurs résultats de comportement asymptotique de sommes, notamment :

- un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ quand n tend vers $+\infty$ (question **10**, directement liée à la question **3**) ;
- un équivalent de $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$ quand n tend vers $+\infty$ (question **11**), qui s'avère être une constante non nulle ;
- et enfin une généralisation du deuxième équivalent (question **13**).

Ces résultats sur les équivalents de sommes s'avèrent relever du même principe général : un théorème sur les sommes de Riemann, adapté à des fonctions intégrables sur un intervalle ouvert borné. Une difficulté majeure est que l'hypothèse d'intégrabilité ne suffit pas à assurer la convergence de sommes de Riemann, même régulières, vers l'intégrale : un contre-exemple était étudié à la question **2**. En revanche, il est classique que des hypothèses de monotonie au voisinage des bornes de l'intervalle, en plus bien sûr de l'intégrabilité, suffisent à assurer la convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale. Dans le sujet, on se limitait à deux exemples simples : la fonction $t \mapsto t^{-1/2}$ sur $]0,1[$ (question **3**), et la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ sur ce même intervalle (questions **4** à **8**).

1.7.2 Structure du sujet

Le sujet était constitué de deux parties à thèmes bien distincts : la première partie utilisait de façon quasi exclusive les techniques sur les intégrales, tandis que la seconde faisait appel aux raisonnements probabilistes, avec quelques questions de calcul asymptotique. Plusieurs résultats de la partie **1** intervenaient dans la partie **2**, et seules les toutes premières questions de la partie **2** pouvaient être traitées de façon entièrement autonome.

Remarques générales sur la présentation et la rédaction

Le jury déplore une nouvelle fois que la présentation des copies soit souvent négligée. Orthographe et syntaxe sont souvent défaillantes. Trop peu de candidats font l'effort d'organiser clairement leur argumentation avec des paragraphes bien découpés, des formules encadrées, etc. La rigueur est trop régulièrement absente dans le discours sur les objets : confusions innombrables entre la fonction f et la valeur $f(x)$, usage de la notation $f(x)'$ dénuée de sens, etc. Enfin, et comme signalé dans les rapports précédents, on attend un surcroît de rigueur de la part des candidats lorsqu'ils utilisent un résultat établi antérieurement dans le sujet : il faut qu'ils s'astreignent systématiquement à faire une référence précise à la question où ledit résultat a été démontré.

1.7.3 Remarques sur les difficultés rencontrées

Ce problème a dans l'ensemble été fort mal réussi par les candidats. Beaucoup d'entre eux sont parvenus uniquement à résoudre les parties les plus élémentaires des questions, très proches du cours, et n'ont presque jamais réussi à traiter une question en profondeur. Notamment, peu de candidats ont compris l'esprit de la première partie, à savoir un recours quasi systématique à la comparaison somme-intégrale pour une fonction monotone : il est possible d'ailleurs que des candidats aient été étonnés d'avoir à utiliser la même technique à trois reprises, et aient voulu chercher dans d'autres directions. Quoi qu'il en soit, il est visible que bien des candidats ont été désarçonnés de ne rester qu'en surface pour les questions **2** à **7**, allant jusqu'à perdre complètement de vue la structure argumentative de cette partie : ainsi, le jury a été étonné par la très faible proportion de copies identifiant un simple raisonnement sur la convergence d'une suite fondé sur la séparation selon les termes de rang pair et les termes de rang impair, ce qui est pourtant un schéma classique (question **8**).

Chez bon nombre de candidats, on note une différence très sensible de performance entre la partie « intégrales » et la partie « probabilités ».

Certains semblent assez à l'aise avec les intégrales généralisées, et très maladroits avec les probabilités, et d'autres présentent le défaut inverse.

Quant au traitement des questions de probabilités, on doit signaler le peu de soin avec lequel beaucoup de candidats traitent les variables aléatoires.

On lit trop souvent des raisonnements abusifs comme « $X_n = 1$ ou $X_n = -1$ », révélant une confusion entre la variable X_n (qui est une fonction), et ses réalisations. De tels raisonnements doivent être impérativement formalisés par retour à une issue (on fixe ω dans l'univers Ω et on raisonne sur $X_n(\omega)$).

Trop de candidats dédaignent la discipline voulant qu'invoquer un théorème nécessite d'en vérifier les hypothèses.

Les candidats étaient confrontés à une difficulté classique, qui réside dans le degré de crédibilité qu'on peut accorder aux réponses intuitives en probabilités, dans un cadre où le sujet fournit un formalisme parfaitement rigoureux du problème. En particulier, pour résoudre une question telle que les questions **15** et **16**, les candidats doivent s'astreindre autant que possible à s'appuyer sur le formalisme des variables aléatoires développé par l'énoncé plutôt que d'agiter des raisonnements intuitifs.

En revanche, quand aucun formalisme clair n'est fourni dans l'énoncé, comme dans la question **20**, une réponse intuitive peut rapporter la totalité des points à condition que le candidat fasse des efforts d'explication (très) conséquents, d'autant plus que le résultat est ici donné.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe F.

1.7.4 Ultimes conseils aux futurs candidats

Terminons comme toujours par réitérer quelques conseils importants pour les futurs candidats.

- Maîtriser parfaitement son cours.
- Être très attentif à la précision de l'énoncé.
- Bien réfléchir, aidé d'un brouillon, à la structure du raisonnement ou du calcul avant de le coucher sur le papier. Au moment de la rédaction, donner toutes les justifications pertinentes (et rien qu'elles !), et structurer correctement ses raisonnements.
- Il est toujours préférable d'analyser un nombre réduit de questions en profondeur plutôt que de traiter superficiellement la totalité du sujet. Beaucoup de candidats ont réussi à avoir une note tout à fait satisfaisante en ne traitant que cinq ou six questions (mais en profondeur).

- Les tentatives de picorage désespéré sur les questions tardives sont le plus souvent vouées à l'échec et irritent les correcteurs.

F Mathématiques 2 PSI

Q1 - Une des rares questions faciles du sujet, avec des résultats décevants pour sa seconde partie. Le fait que l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle implique son intégrabilité sur tout sous-intervalle relève du cours, et on n'en attendait pas de justification. Attention, la continuité sur $]a, b[$ n'implique en aucun cas l'intégrabilité sur $]a, b[$.

La deuxième partie de la question n'a été correctement traitée que dans une toute petite minorité de copies : il s'agissait d'invoquer un résultat de convergence sur la méthode des rectangles à gauche ou à droite, mais quel que soit le côté retenu il y avait nécessairement un terme de plus que dans la somme présentée dans l'énoncé. *A contrario*, beaucoup de candidats ont manqué de rigueur et ont inventé le résultat qui les arrangeait.

Q2 - Le seul aspect de cette question qui a souvent été bien réussi a été la comparaison asymptotique initiale, où une quantité substantielle de candidats s'enlise toutefois dans des raisonnements par récurrence qui n'aboutissent pas (où uniquement parce que des inégalités arrivent par magie).

Le reste de la question a été très mal réussi. Il est évident que très peu de candidats ont fait l'effort de faire un dessin pour se représenter la fonction et notamment les intervalles significatifs du domaine de définition, ce qui a conduit à de très nombreux contresens (tels candidats croient voir une fonction ayant une limite nulle en 0, d'autres ne comprennent pas que plusieurs intervalles $[a_k, b_k]$ interviennent dans la définition). Il est crucial pour les candidats de faire au moins un dessin suffisamment propre au brouillon, et il serait même souhaitable de reprendre ce dessin sur la copie s'il permet d'éclairer les points du raisonnement.

Très peu de candidats sont parvenus à analyser correctement les différentes difficultés : pour la définition, il y avait non seulement le problème de la double-définition formelle en $\frac{a_k+b_k}{2}$, mais de manière plus délicate encore la difficulté du recouvrement éventuel des intervalles $[a_k, b_k]$ entre eux ! Dans le même ordre d'idée, la continuité n'a essentiellement jamais été traitée jusqu'au bout, la continuité en les points hors des intervalles de la forme $[a_k, b_k]$ n'était jamais démontrée correctement (ici, la convergence vers 0 de (a_k) et (b_k) était cruciale pour éviter des phénomènes de points d'accumulation : en toute rigueur l'étude de la continuité en un point situé hors des intervalles $[a_k, b_k]$ nécessitait de démontrer que la fonction était nulle au voisinage d'un tel point). Enfin, l'intégrabilité n'est qu'exceptionnellement comprise, la plupart des candidats ne voyant absolument pas qu'ils devaient sommer les intégrales sur les intervalles $[a_k, b_k]$, réduisant ainsi l'intégrabilité de la fonction f à la convergence d'une série.

Q3 - L'intégrabilité relevait du cours, on attendait toutefois une explication de l'intégrabilité sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$ puisque ce n'est pas formellement sur celui-ci que porte le théorème du cours, mais sur les intervalles du type $]0, a]$. La comparaison somme-intégrale est parfois bien comprise, très souvent faite pour la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ sur $[1, n]$, ce qui était judicieux pour cette question, mais pouvait handicaper pour l'approche des questions suivantes. Trop de candidats prétendent déduire la convergence du théorème sur les sommes de Riemann, ce qui manifeste une incompréhension du sens global de cette partie du sujet.

Q4 - L'étude de variations est souvent correctement faite malgré un taux d'erreurs important sur les calculs de dérivée. Peu de candidats toutefois ont la clairvoyance de se limiter à étudier la monotonie de $t \mapsto t(1-t)$ (on raisonnait alors par composition de fonctions monotones). L'intégrabilité est ensuite régulièrement bien justifiée, mais le reste de la question n'est que très peu traité, la plupart des candidats ne comprenant pas que l'observation de la monotonie devait les pousser à tenter une comparaison somme-intégrale.

Q5 - La symétrie de h par rapport à $\frac{1}{2}$ est régulièrement observée par les candidats, mais trop souvent avec un vocabulaire très approximatif (non, on ne parle pas habituellement de « fonction paire centrée en $\frac{1}{2}$ » !).

Q6 - La question reposait, comme la précédente, sur la symétrie par rapport à $\frac{1}{2}$, mais il est très rare de voir celle-ci convenablement exploitée. Quand les candidats ont la bonne idée, il est rare qu'elle soit exploitée avec rigueur, le terme central passant à la trappe presque systématiquement alors qu'il est bien clair que la somme possède une quantité impaire de termes.

Q7 - Il s'agissait une nouvelle fois de réaliser une comparaison somme-intégrale, avec une difficulté supplémentaire liée au fait qu'elle pouvait amener à comparer $h\left(\frac{n}{2n+1}\right)$ à $\frac{1}{2n+1}\int_{\frac{n}{2n+1}}^{\frac{n+1}{2n+1}} h$, situation délicate où l'on ne pouvait pas invoquer la décroissance de h. La deuxième partie de la question, reposant une énième fois sur l'argument de symétrie déjà utilisé maintes fois, a connu un taux de succès légèrement supérieur, mais tout de même très faible.

Q8 - Comme indiqué plus tôt, le jury a été étonné de la proportion très faible de bonnes réponses sur la justification de la convergence, qui ne reposait que sur un découpage en termes de rang pair - termes de rang impair.

Q9 - Un meilleur taux de réussite ici que dans les questions précédentes, avec beaucoup de changements de variable judicieux. Attention, tout changement de variable dépassant les strictes fonctions classiques exige une mention exhaustive des hypothèses du théorème de changement de variable (ici, pour les intégrales généralisées).

Q10 - Pour qui avait traité avec succès la question **3** dans son intégralité, cette question présentait peu de difficultés, mais très peu de candidats ont fait preuve de rigueur quant aux bornes précises de la somme : ici une application directe de la question **3** laissait une somme se terminant à l'indice $n-1$, et non à n.

Q11 - Il s'agissait simplement de combiner les questions **8** et **9**. Un nombre non négligeable de candidats y parvient.

Q12 - Cette question, reprenant le schéma de démonstration du classique théorème de Cesàro, a eu un taux de réussite très faible.

Q13 - Presque aucun candidat n'est parvenu à rentrer substantiellement dans cette question, qui nécessitait de bien maîtriser plusieurs des techniques déjà utilisées : changements de variable, majorations asymptotiques, etc.

Q14 - Cette première question de la partie **2**, très élémentaire, a permis à de nombreux candidats de se relancer. Beaucoup ne prennent pas la peine d'expliquer de manière détaillée comment ils exploitent le caractère centré de X_n pour déterminer le paramètre de $\frac{1+X_n}{2}$ en tant que variable de Bernoulli. Le plus judicieux était d'utiliser la linéarité de l'espérance et la valeur (connue) de l'espérance d'une variable de Bernoulli.

Q15 - Le résultat est régulièrement correct, bien que les explications soient souvent confuses. Comme indiqué dans les remarques générales de ce rapport, la modélisation très précise de la marche aléatoire aurait dû pousser les candidats à s'appuyer sur des variables aléatoires dans la formulation de la réponse.

Q16 - Les explications sont trop rares pour le traitement du cas où ℓ et n sont de parités distinctes. Quelques candidats repèrent avec succès une loi déduite d'une loi binomiale par application d'une fonction simple, ce qui leur permet de répondre très rapidement. Beaucoup de candidats oublient que ℓ peut être négatif.

Q17 - Le jury n'a pas pénalisé les candidats ignorant l'hypothèse (superflue) du théorème admis voulant que les suites ne devaient pas s'annuler. On a régulièrement vu de bonnes réponses, mais aussi beaucoup d'incompréhensions sur la signification de l'équivalence en termes de négligeabilité (on lit trop souvent que $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$, voire $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(u_n)$).

Q18 - Trop peu de candidats rappellent à ce stade qu'un indice d'égalité ne saurait être impair. Le reste de la question est régulièrement convenablement traité grâce aux indicatrices, c'est bien le moins qu'on pouvait attendre tant l'indication en ce sens était explicite.

Q19 - Cette question a eu un taux de succès convenable, l'équivalent classique de $\displaystyle\binom{2n}{n}$ grâce à la formule de Stirling a posé assez peu de problèmes. Néanmoins, on doit déplorer un manque de rigueur dans l'application de la question **17**, les hypothèses sont trop souvent oubliées. Une erreur de raisonnement fréquente a consisté à donner d'emblée un équivalent de $\sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{2i}{i}}{4^i}$ sans se préoccuper de vérifier les hypothèses de la question précédente, notamment la divergence de la série.

Q20 - Les explications sur cette question ont souvent été très confuses. Ici, on acceptait des raisonnements intuitifs puisque la situation n'était pas formalisée en termes de suites de variables aléatoires. On n'a pratiquement vu que des passages en force.

Q21 - On a vu une quantité étonnante de candidats tenter cette dernière question, sans aucun succès.

RETOUR